# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

---

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

31. BAND 5. (SCHLUSS-) HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 17. MAI 1930)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

Die

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

**K. Knopp,** Tübingen, Neckarhalde 55,
**L. Lichtenstein,** Leipzig, Großgörschenstraße 3,
**E. Schmidt,** Berlin NW, Altonaerstr. 30,
**I. Schur,** Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

31. Band. **Inhalt:** 5. Heft.

Seite

Enskog, D., Über die Hauptfunktionen unsymmetrischer Kerne . . . . . 601
Shoda, K., Über die charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe . . . . . 611
Kubota, T., Eine kennzeichnende Eigenschaft der ebenen algebraischen Kurven $n$-ter Ordnung . . . . . 625
Hamburger, H., Zur Theorie der sphärischen Abbildung im Großen. I. Konvexe Flächen mit zwei Nabelpunkten . . . . . 629
Selberg, H. L., Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen . . . . . 709
Mahler, K., Über Beziehungen zwischen der Zahl $e$ und Liouvilleschen Zahlen . . 729
Brauer, R., Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen. Zweite Mitteilung . . . . . 733
Perron, O., Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme . . . . . 748
Stratemeyer, G., Stammbruchentwickelungen für die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl . . . . . 767
Haar, A., Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme . 769
Berichtigung zu der Arbeit „Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage“ von Helmut Hasse . . . . . 799
Preisaufgabe der Königsberger Gelehrten Gesellschaft . . . . . 799
Der erste Mathematiker-Kongreß der Union der Sozialistischen Räte-Republiken . . . . . 800

# Über die Hauptfunktionen unsymmetrischer Kerne.

Von

D. Enskog in Gävle (Schweden).

Als Folgerung seiner Eigenwerttheorie der symmetrischen Integralgleichung konnte E. Schmidt[1]) auch für die unsymmetrische einen Teil der Fredholmschen Sätze ableiten. In demselben Umfange sind diese Sätze in einer späteren Arbeit[2]) von mir bewiesen worden. Der fehlende Satz, daß die homogene Gleichung und ihre transponierte gleichzeitig lösbar sind und dieselbe Anzahl linear unabhängiger Lösungen besitzen, läßt sich dann aber, wie ich später[3]) zeigte, in einfacher Weise gewinnen, ebenso auch das Theorem von Schur, aus dem u. a. hervorgeht, daß sich die Eigenwerte nicht im Endlichen häufen können.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß ähnliche Überlegungen, wie die in meiner zweiten Arbeit angewandten, hinreichen, um die wichtigsten Sätze über Hauptfunktionen und kanonische Kerne abzuleiten. Wir stützen uns dabei auf die Fredholmschen Sätze und setzen die Hauptsätze über lineare Abhängigkeit und die wichtigsten Eigenschaften orthogonaler und [illegible] gonaler Funktionensysteme voraus[4]).

Es seien $s$ und $t$ im Grundgebiet $a \leqq s \leqq b$ [illegible] reelle unabhängige Veränderliche, und es sei $K(s,t)$ ein [illegible]er oder komplexer Kern, von dem wir voraussetzen, daß die Integrale

$$\int |K(s,t)|^2 ds, \quad \int |K(s,t)|^2 dt, \quad \iint |K(s,t)|^2 ds\, dt$$

existieren, und daß die beiden ersten beschränkte Funktionen sind. Die Integrationen sollen hier und im folgenden stets in den Grenzen $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ erfolgen.

[1]) E. Schmidt, Math. Annalen **63** (1907), S. 433.

[2]) D. Enskog, Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 670.

[3]) D. Enskog, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 299.

[4]) Herrn Professor L. Neder danke ich verbindlichst für eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen.

## § 1.

## Der Fall, wo zu einem Eigenwert nur ein Paar von Eigenfunktionen gehört.

Der Übersichtlichkeit halber nehmen wir zunächst an, daß die homogenen Gleichungen

$$(1) \qquad J(\psi) \equiv \psi(s) - \lambda_1 \int K(s,t)\psi(t)\,dt = 0,$$

$$(2) \qquad T(\chi) \equiv \chi(s) - \lambda_1 \int K(t,s)\chi(t)\,dt = 0$$

für den Eigenwert $\lambda = \lambda_1$, nur je eine normierte Lösung $\psi_1(s)$ bzw. $\chi_1(s)$ besitzen, deren inneres Produkt wir in üblicher Weise mit $(\chi_1, \psi_1)$ bezeichnen.

Ist nun $(\chi_1, \psi_1) = 0$, so ist die Integralgleichung

$$(3)_2 \qquad T(\chi_2) = -\chi_1(s)$$

durch eine Funktion $\chi_2(s)$ lösbar. Ist auch noch $(\chi_2, \psi_1) = 0$, so besitzt die Integralgleichung

$$(3)_3 \qquad T(\chi_3) = -\chi_2(s)$$

eine Lösung $\chi_3(s)$. Ist allgemein noch $(\chi_{i-1}, \psi_1) = 0$, so sei $\chi_i(s)$ die Lösung der Integralgleichung

$$(3)_i \qquad T(\chi_i) = -\chi_{i-1}(s).$$

Diesen Prozeß setzen wir so lange fort, bis wir zu einer Funktion $\chi_n(s)$ gelangen, die zu $\psi_1(s)$ nicht orthogonal ist. Wir haben dann für $\nu = 2, 3, \ldots, n$ die Beziehung $(3)_\nu$ und überdies

$$(4) \qquad (\chi_1, \psi_1) = (\chi_2, \psi_1) = \ldots = (\chi_{n-1}, \psi_1 = 0, \qquad (\chi_n, \psi_1) \neq 0.$$

Daß das vorstehende Verfahren einmal abbrechen muß, daß also ein $n$ der [illegible]nten Art existiert, wird durch die folgende Überlegung klar. Wir denken uns [illegible]unktionensystem $\chi_1(s), \ldots, \chi_\nu(s)$ orthogonalisiert, d. h. wir ersetzen $\chi_i(s)$ $(i = 1, \ldots \nu)$ durch eine lineare Kombination $\chi_i^*(s)$ von $\chi_1(s), \ldots, \chi_i(s)$, welche die Bedingungen

$$(\chi_i^*, \overline{\chi_k^*}) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{„ } i = k, \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

erfüllt. Diese Funktionen genügen dann Gleichungen von der Form

$$T(\chi_i^*) = -a_1\chi_1^*(s) - a_2\chi_2^*(s) - \ldots - a_{i-1}\chi_{i-1}^*(s),$$

wo $a_1, \ldots, a_{i-1}$ Konstanten sind, oder in anderer Schreibweise:

$$\lambda_1 \int K(t,s)\chi_i^*(t)\,dt = a_1\chi_1^*(s) + \ldots + a_{i-1}\chi_{i-1}^*(s) + \chi_i^*(s).$$

Hieraus folgt

$$|\lambda_1|^2 \int ds \left| \int K(t,s)\chi_i^*(t)\,dt \right|^2 = |a_1|^2 + \ldots + |a_{i-1}|^2 + 1 \geqq 1.$$

Summiert man über alle $i$, so erhält man nach der Besselschen Ungleichung

$$|\lambda_1|^2 \iint |K(t,s)|^2 ds\, dt \geqq \sum_{i=1}^{\nu} |\lambda_1|^2 \int ds \left| \int K(t,s)\, \chi_i^*(t)\, dt \right|^2 \geqq \nu.$$

Daher kann $\nu$ nicht beliebig groß sein.

Wie man leicht einsieht, bekommt man bei diesem Prozeß niemals eine Funktion $\chi_i(s)$, die von $\chi_1(s), \ldots, \chi_{i-1}(s)$ linear abhängig ist. Wäre nämlich

$$\sum_{k=1}^{i} c_k \chi_k(s) \equiv 0 \qquad (c_i \neq 0),$$

so würde nach (3)

$$\sum_{k=2}^{i} c_k \chi_{k-1}(s) \equiv 0$$

sein usw. und endlich

$$c_i \chi_1(s) \equiv 0 \qquad (c_i \neq 0),$$

was offenbar nicht zutrifft.

Ist $\underline{\chi_2(s)}$ eine Lösung von $(3)_2$, so ist auch $\underline{\chi_2(s)} + c_1 \chi_1(s)$ eine solche Lösung, wenn $c_1$ eine willkürliche Konstante bedeutet. Die allgemeine Lösung von $(3)_3$ hat dann die Form $\underline{\chi_3(s)} + c_1 \underline{\chi_2(s)} + c_2 \chi_1(s)$, wenn $\chi_1(s)$, $\underline{\chi_2(s)}$, $\underline{\chi_3(s)}$ ein partikulares Lösungssystem und $c_2$ eine neue willkürliche Konstante ist usw. Der allgemeine Ausdruck von $\chi_k(s)$ hängt von $k-1$ willkürlichen Konstanten ab, und zwar tritt $c_1$ als Koeffizient von einem $\underline{\chi_{k-1}(s)}$ auf.

Es gibt keine von $\chi_1(s), \ldots, \chi_n(s)$ linear unabhängige Funktion $\chi(s)$, welche einer Gleichung von der Form

$$T(\chi) = a_1 \chi_1(s) + a_2 \chi_2(s) + \ldots + a_n \chi_n(s)$$

genügt, wo $a_1, \ldots, a_n$ Konstanten sind. Wegen der Orthogonalitätsbedingung müßte nämlich $a_n = 0$ sein, und es wäre sodann nach $(3)_2, \ldots, (3)_n$ auch $\chi(s)$ eine lineare Kombination von $\chi_1(s), \ldots, \chi_n(s)$.

Die Eigenfunktion $\psi_1(s)$ denken wir uns jetzt so normiert, daß

$$(\chi_n, \psi_1) = 1 \tag{5}$$

wird. Wir bilden ferner die Funktionenfolge

$$\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_m(s), \tag{6}$$

indem wir zu $\psi_1(s)$ sukzessive durch Addition geeigneter Nullösungen die zu $\chi_n(s)$ orthogonalen Lösungen

$$J(\psi_2) = -\psi_1(s), \quad J(\psi_3) = -\psi_2(s), \quad \ldots, \quad J(\psi_m) = -\psi_{m-1}(s) \tag{7}$$

hinzufügen, solange diese Gleichungen noch lösbar sind.

Aus der Identität

$$\int \chi_i(s)\, J(\psi_k)\, ds = \int \psi_k(s)\, T(\chi_i)\, ds \tag{8}$$

folgt nach $(3)_i$ und (7)

$$(\chi_i,\ \psi_{k-1}) = (\chi_{i-1},\ \psi_k). \tag{9}$$

Nach (4) wird daher

$$(\chi_i,\ \psi_k) = 0 \quad \text{für} \quad i + k < n + 1 \tag{10}$$

und speziell

$$(\chi_1,\ \psi_2) = (\chi_1,\ \psi_3) = \ldots = (\chi_1,\ \psi_{n-1}) = 0. \tag{10a}$$

Nach (5) ist

$$(\chi_i,\ \psi_k) = 1 \quad \text{für} \quad i + k = n + 1. \tag{11}$$

Daher wird

$$(\chi_1,\ \psi_n) = 1, \tag{11a}$$

und es muß $m$ gleich $n$ sein in (6) und (7).

Aus $(\chi_n,\ \psi_k) = 0$ $(k = 2, \ldots, n)$ folgt nach (9)

$$(\chi_i,\ \psi_k) = 0 \quad \text{für} \quad i + k > n + 1. \tag{12}$$

Die Funktionen

$$\chi_1(s),\ \chi_2(s),\ \ldots,\ \chi_n(s),$$
$$\psi_n(s),\ \psi_{n-1}(s),\ \ldots,\ \psi_1(s)$$

bilden mithin ein normiertes biorthogonales Funktionensystem. Es ist das vollständige System der zu dem Eigenwerte $\lambda_1$ gehörigen Hauptfunktionen von $K(s, t)$, und $n$ ist die Ordnung des Eigenwertes.

Die Gleichungen $(3)_k$ und (7) nehmen anders geschrieben bzw. die Form an:

$$\lambda_1 \int K(t, s)\, \chi_k(t)\, dt = \chi_{k-1}(s) + \chi_k(s), \tag{13}$$

$$\lambda_1 \int K(s, t)\, \psi_k(t)\, dt = \psi_{k-1}(s) + \psi_k(s). \tag{14}$$

Bei $\chi_0(s) = \psi_0(s) \equiv 0$ gelten diese Gleichungen für $k = 1, 2, \ldots, n$.

Setzen wir weiter

$$k(s, t) = \frac{1}{\lambda_1}\{\psi_1(s)[\chi_n(t) + \chi_{n-1}(t)] + \ldots + \psi_{n-1}(s)[\chi_2(t) + \chi_1(t)] + \psi_n(s)\chi_1(t)\}, \tag{15}$$

$$H(s, t) = K(s, t) - k(s, t), \tag{16}$$

so gelten (13) und (14) offenbar auch, wenn man $K(s, t)$ durch $k(s, t)$ ersetzt. Es ist folglich $H(s, t)$ links zu $\chi_1(s), \ldots, \chi_n(s)$ und rechts zu $\psi_1(s), \ldots, \psi_n(s)$ orthogonal.

Es gilt daher

$$\int H(s,\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau = 0, \qquad \int k(s,\tau)\,H(\tau,t)\,d\tau = 0, \tag{17}$$

d. h. diese beiden Kerne sind zueinander orthogonal.

Aus dem Obigen geht hervor, daß der Eigenwert $\lambda_1$ und die zugehörigen Eigen- und Hauptfunktionen von $K(s,t)$ auch solche von $k(s,t)$ sind. Daß $k(s,t)$ keine anderen besitzt, findet man in bekannter Weise, wenn man die rechte Seite von (15) in die den linken Seiten von (13) und (14) entsprechenden Integralausdrücke einsetzt.

Da $H(s,t)$ links bzw. rechts zu den $\chi_i(s)$ bzw. $\psi_i(s)$ orthogonal ist, so können diese zu $\lambda_1$ gehörigen Hauptfunktionen von $K(s,t)$ nicht solche von $H(s,t)$ sein.

Man folgert aber leicht, daß alle Eigenwerte von $H(s,t)$ auch solche von $K(s,t)$ sind, daß die dazugehörigen Eigen- und Hauptfunktionen des ersten Kernes auch solche des zweiten sind, und daß $\lambda_1$ daher kein Eigenwert von $H(s,t)$ ist. Jede Funktion einer $\psi$-Reihe (6) von $H(s,t)$ ist nämlich, wie aus den Definitionsgleichungen dieser Funktionen hervorgeht, zu $\chi_1(s), \ldots, \chi_n(s)$ orthogonal und daher eine zu demselben Eigenwert gehörige ebensolche Funktion des Kernes $K(s,t)$. Entsprechendes gilt für die Funktionen einer $\chi$-Reihe.

Endlich ist jeder von $\lambda_1$ verschiedener Eigenwert von $K(s,t)$ auch ein Eigenwert von $H(s,t)$, und die dazu gehörigen Eigen- und Hauptfunktionen des ersten Kernes sind auch solche des zweiten. Dies wird klar, sobald man bewiesen hat, daß jede zu einem Eigenwert von $K(s,t)$ gehörige Hauptfunktion der $\chi$-Reihe zu jeder, einem anderen Eigenwert gehörigen, der $\psi$-Reihe orthogonal ist.

Es seien nun $\chi_1^{(\alpha)}(s), \ldots, \chi_m^{(\alpha)}(s)$ und $\psi_1^{(\beta)}(s), \ldots, \psi_n^{(\beta)}(s)$ bzw. zu den Eigenwerten $\lambda_\alpha$ und $\lambda_\beta$ gehörige Hauptfunktionen, die durch die Gleichungen

$$\lambda_\alpha \int \chi_i^{(\alpha)}(s)\,K(s,t)\,ds = \chi_{i-1}^{(\alpha)}(t) + \chi_i^{(\alpha)}(t) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\lambda_\beta \int K(s,t)\,\psi_k^{(\beta)}(t)\,dt = \psi_{k-1}^{(\beta)}(s) + \psi_k^{(\beta)}(s) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

definiert sind. Aus diesen Gleichungen folgt

$$(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\chi_i^{(\alpha)}, \psi_k^{(\beta)}) = \lambda_\beta(\chi_{i-1}^{(\alpha)}, \psi_k^{(\beta)}) - \lambda_\alpha(\chi_i^{(\alpha)}, \psi_{k-1}^{(\beta)}), \tag{18}$$

wo dem unteren Index Null immer eine identisch verschwindende Funktion entsprechen soll. Da für jedes $i$ und $k$ die Ausdrücke $(\chi_i^{(\alpha)}, \psi_0^{(\beta)})$ und $(\chi_0^{(\alpha)}, \psi_k^{(\beta)})$ verschwinden, folgt aus (18):

$$(\chi_i^{(\alpha)}, \psi_k^{(\beta)}) = 0 \qquad (\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta) \tag{19}$$

für $i + k = \nu$, sobald man dies für $i + k = \nu - 1$ bewiesen hat. Für $i + k = 1$ oder $= 2$ gilt (19) sicher; daher auch allgemein.

Wir können leicht zeigen, daß in bezug auf Änderungen der willkürlichen Konstanten, die in $\chi_i(s)$ und $\psi_i(s)$ eingehen, $k(s,t)$ invariant ist. Ist

$$\begin{aligned}\chi_i^*(s) &= a_{i1}\,\chi_1(s) + \ldots + a_{ii}\,\chi_i(s),\\ \psi_i^*(s) &= b_{i1}\,\psi_1(s) + \ldots + b_{ii}\,\psi_i(s)\end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ a_{ii} \neq 0;\ b_{ii} \neq 0)$$

ein zweites System von Funktionen, die dieselben Integralgleichungen (13) und (14) und dieselben übrigen Bedingungen wie die $\chi_i(s)$ und $\psi_i(s)$ erfüllen, und ist $k^*(s,t)$ der gemäß (15) aus diesen Funktionen gebildete Kern, so kann man zunächst umgekehrt die $\chi_i(s)$ und die $\psi_i(s)$ als lineare Kombinationen bzw. der $\chi_k^*(s)$ und der $\psi_k^*(s)$ angeben. Es gilt ferner nach dem Früheren

$$\begin{aligned}\int k(s,t)\,\chi_i(s)\,ds &= \int K(s,t)\,\chi_i(s)\,ds,\\ \int k^*(s,t)\,\chi_i^*(s)\,ds &= \int K(s,t)\,\chi_i^*(s)\,ds\end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Hieraus folgt

$$\int k^*(s,t)\,\chi_i(s)\,ds = \int K(s,t)\,\chi_i(s)\,ds = \int k(s,t)\,\chi_i(s)\,ds.$$

Führt man in $k^*(s,t)$ die Funktionen ohne Stern ein, so erhält man $n$ Glieder, die bzw. $\psi_1(s), \ldots, \psi_n(s)$ als Faktoren enthalten. Aus unserer letzten Gleichung geht nun nach (10), (11) und (12) hervor, daß $\psi_i(s)$ in $k^*(s,t)$ und $k(s,t)$ denselben Koeffizienten haben muß, womit die Behauptung bewiesen ist.

## § 2.

## Der allgemeine Fall.

Zu dem Eigenwert $\lambda_1$ sollen jetzt $r$ linear unabhängige Eigenfunktionen beider Art gehören, $\chi_1^{(1)}(s), \chi_1^{(2)}(s), \ldots, \chi_1^{(r)}(s)$ bzw. $\psi_1^{(1)}(s), \psi_1^{(2)}(s), \ldots, \psi_1^{(r)}(s)$.

Ist jede Funktion der ersten Folge zu jeder der zweiten orthogonal, so sind die $r$ Integralgleichungen zweiter Art

$$T(\chi_2^{(k)}) = -\chi_1^{(k)}(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

lösbar. Sind auch die Lösungen, die offenbar linear unabhängig sind, zu $\psi_1^{(1)}(s), \ldots, \psi_1^{(r)}(s)$ orthogonal, so setzt man in derselben Weise fort, bis man die Folge $\chi_n^{(1)}(s), \ldots, \chi_n^{(r)}(s)$ konstruiert hat, deren Glieder nicht alle zu $\psi_1^{(1)}(s), \ldots, \psi_1^{(r)}(s)$ orthogonal sind. Aus den Funktionenfolgen

$$\begin{gathered}\chi_n^{(1)}(s), \ldots, \chi_n^{(r)}(s),\\ \psi_1^{(1)}(s), \ldots, \psi_1^{(r)}(s)\end{gathered}$$

kann man dann durch lineare Kombination zwei neue Folgen von je $r$ linear unabhängigen Funktionen herstellen, so daß die $l$ ersten Funktionenpaare ($l \leqq r$) ein normiertes Biorthogonalsystem bilden, während die $r - l$

übrigen Funktionen jeder Folge zu jeder Funktion der anderen Folge orthogonal sind. Auf diese neuen Funktionen übertragen wir unsere alten Bezeichnungen.

Obwohl die Wahl der genannten Funktionen gewissermaßen willkürlich ist, so wird jedoch die Zahl $l$ immer dieselbe. Zeichnen wir nämlich die Funktionen eines anderen in derselben Weise erhaltenen Funktionensystems und das entsprechende $l$ durch einen Stern aus, so sind die $\chi^*(s)$ und die $\psi^*(s)$ lineare Kombinationen bzw. der $\chi(s)$ und der $\psi(s)$ und umgekehrt. Wenn ein $\chi_n^*(s)$ zu allen $\psi_1^*(s)$ orthogonal ist, so ist es daher auch zu allen $\psi_1(s)$ orthogonal. Wie man leicht einsieht, kann es daher nur eine lineare Kombination von $\chi_n^{(l+1)}(s), \ldots, \chi_n^{(r)}(s)$ sein. Solcher Kombinationen kann es aber nicht mehr als $r-l$ linear unabhängige geben. Es kann folglich $l^*$ nicht kleiner sein als $l$. Ebenso folgt, daß $l$ nicht kleiner als $l^*$ ist.

Wir bilden jetzt für jeden unteren Index $k<n$ dieselben linearen Kombinationen der $\chi_k^{(1)}(s), \ldots, \chi_k^{(r)}(s)$ wie eben für $k=n$ und übertragen unsere früheren Bezeichnungen $\chi_k^{(i)}(s)$ auf diese neuen Funktionen. Dann gilt

$$T(\chi_k^{(i)}) = -\chi_{k-1}^{(i)}(s) \qquad (i=1,\ldots,r;\ k=1,\ldots,n) \tag{20}$$

und es sind für jedes $k$ die Funktionen $\chi_k^{(1)}(s), \ldots, \chi_k^{(r)}(s)$ linear unabhängig. Betrachten wir nämlich die beiden Ausdrücke

$$\begin{cases} c_1\chi_k^{(1)}(s) + \ldots + c_r\chi_k^{(r)}(s) & (k<n), \\ c_1\chi_n^{(1)}(s) + \ldots + c_r\chi_n^{(r)}(s), \end{cases} \tag{21}$$

wo $c_1, \ldots, c_r$ Konstanten sind, die nicht alle verschwinden, und führen wir hier unsere alten Funktionen $\chi_k^{(i)}(s)$ und $\chi_n^{(i)}(s)$ $(i=1,\ldots,r)$, ein. Dann ergeben sich zwei Ausdrücke, wo für jedes $i$ $\chi_k^{(i)}(s)$ und $\chi_n^{(i)}(s)$ denselben Koeffizienten haben. Wäre die erste der beiden Summen (21) gleich Null, so müßte wegen der linearen Unabhängigkeit der ursprünglichen $\chi_k^{(1)}(s), \ldots, \chi_k^{(r)}(s)$ die Koeffizienten dieser Funktionen verschwinden. Dann würde auch die zweite Summe (21) verschwinden. Da die neuen $\chi_n^{(1)}(s), \ldots, \chi_n^{(r)}(s)$ linear unabhängig sind, so ist aber wegen der Voraussetzung über die $c_1, \ldots, c_r$ diese Summe von Null verschieden.

Wie in § 1 sieht man ein, daß die Funktionen $\chi_k^{(i)}(s)$ $(i=1,\ldots,r;\ k=1,\ldots,n)$ überhaupt linear unabhängig sind, und daß die bei ihrer Bestimmung auftretende Zahl $n$ existiert.

Nach dem früher (S. 603) Gesagten tritt in $\chi_2^{(i)}(s)$ eine willkürliche Konstante $c_1^{(ij)}$ auf als Koeffizient von einem $\chi_1^{(j)}(s)$. In $\chi_n^{(i)}(s)$ erscheint dieselbe Konstante als Koeffizient von einem $\chi_{n-1}^{(j)}(s)$. Die Werte dieser Konstanten haben auf die inneren Produkte $(\chi_n^{(i)}, \psi_1^{(j)}) = (\chi_n^{(i)}, \psi_1^{(j)})$ offenbar keinen Einfluß.

Nachdem wir in dieser Weise die Funktionenfolgen

$$\begin{cases} \psi_1^{(1)}(s), \ldots, \psi_1^{(l)}(s), \\ \chi_n^{(1)}(s), \ldots, \chi_n^{(l)}(s) \end{cases} \tag{22}$$

bestimmt haben, die bei beliebiger Wahl der genannten Konstanten ein biorthogonales Funktionensystem bilden, suchen wir die Lösungen der Gleichungen

$$T(\chi_{n+1}^{(i)}) = -\chi_n^{(i)}(s) \qquad (i = l+1, \ldots, r), \tag{23}$$

die nach den Voraussetzungen alle lösbar sind. In $\chi_{n+1}^{(i)}(s)$ tritt die Konstante $c_1^{(ij)}$ als Koeffizient von einem $\chi_n^{(j)}(s)$ auf. Da für $j \leqq l$ und beliebiges $s$ $(\chi_n^{(s)}, \psi_1^{(j)}) = \delta_{sj}$ ist, so kann man für solche $j$ die genannte Konstante so bestimmen, daß $\chi_{n+1}^{(i)}(s)$ zu $\psi_1^{(j)}(s)$ $(j = 1, \ldots, l)$ orthogonal wird. Diese Orthogonalität besteht unabhängig von der Wahl der übrigen Konstanten.

Sind diese Lösungen auch zu $\psi_1^{(l+1)}(s), \ldots, \psi_1^{(r)}(s)$ orthogonal, so bestimmt man durch Auflösung der Gleichungen

$$T(\chi_{n+2}^{(i)}) = -\chi_{n+1}^{(i)}(s) \qquad (i = l+1, \ldots, r) \tag{23a}$$

und Festlegung der Konstanten $c_2^{(ij)}$ $(i = l+1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, l)$ $r - l$ Funktionen $\chi_{n+2}^{(i)}(s)$, die zu $\psi_1^{(j)}(s)$ orthogonal sind, und setzt in dieser Weise fort, bis man eine Funktion gefunden hat, die nicht zu jeder der Funktionen $\psi_1^{(l+1)}(s), \ldots, \psi_1^{(r)}(s)$ orthogonal ist. Dann ordnet man die $r - l$ Funktionenpaare in der schon beschriebenen Weise um usw.

Nach allem erhält man die Funktionenfolgen

$$\begin{cases} \psi_1^{(1)}(s), \ \psi_1^{(2)}(s), \ \ldots, \ \psi_1^{(r)}(s), \\ \chi_{n_1}^{(1)}(s), \ \chi_{n_2}^{(2)}(s), \ \ldots, \ \chi_{n_r}^{(r)}(s), \end{cases} \tag{24}$$

die ein biorthogonales System bilden und wo $n_{j+1} \geqq n_j$ ist.

Für jedes $j$ bilden wir jetzt durch Auflösung der Integralgleichungen

$$J(\psi_{k+1}^{(j)}) = -\psi_k^{(j)}(s) \qquad (k = 1, \ldots, m_j - 1) \tag{25}$$

eine neue Funktionenfolge $\psi_1^{(j)}(s), \ldots, \psi_{m_j}^{(j)}(s)$. Durch Addition geeigneter Nullösungen können wir es offenbar immer erreichen, daß die neuen Funktionen zu allen Funktionen der zweiten Zeile von (24) orthogonal werden.

Für ein gegebenes $j$ gelten nun alle unsere Schlüsse S. 604. Es ist insbesondere $m_j = n_j$ und

$$\begin{cases} (\chi_i^{(j)}, \psi_k^{(j)}) = 1 \quad \text{für} \quad i + k = n_j + 1, \\ (\chi_i^{(j)}, \psi_k^{(j)}) = 0 \quad \text{für} \quad i + k \neq n_j + 1. \end{cases} \tag{26}$$

Für verschiedene obere Indizes folgt aus (18), wenn man dort $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ einsetzt,

$$(27) \qquad (\chi_{i-1}^{(\alpha)}, \psi_k^{(\beta)}) = (\chi_i^{(\alpha)}, \psi_{k-1}^{(\beta)}).$$

Für eine konstante Summe der unteren Indizes haben daher diese inneren Produkte denselben Wert. Nun ist nach dem Früheren für $\alpha \neq \beta$

$$(\chi_1^{(\alpha)}, \psi_1^{(\beta)}) = (\chi_2^{(\alpha)}, \psi_1^{(\beta)}) = \ldots = (\chi_{n_\alpha}^{(\alpha)}, \psi_1^{(\beta)}) = 0,$$
$$(\chi_{n_\alpha}^{(\alpha)}, \psi_2^{(\beta)}) = (\chi_{n_\alpha}^{(\alpha)}, \psi_3^{(\beta)}) = \ldots = (\chi_{n_\alpha}^{(\alpha)}, \psi_{n_\beta}^{(\beta)}) = 0.$$

Hier ist jeder mögliche Wert der erwähnten Summe vertreten. Es gilt folglich allgemein

$$(28) \qquad (\chi_i^{(\alpha)}, \psi_k^{(\beta)}) = 0 \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Setzen wir

$$(29) \qquad k^{(j)}(s,t) = \frac{1}{\lambda_1}\{\psi_1^{(j)}(s)[\chi_{n_j}^{(j)}(t) + \chi_{n_j-1}^{(j)}(t)] + \ldots$$
$$+ \psi_{n_j-1}^{(j)}(s)[\chi_2^{(j)}(t) + \chi_1^{(j)}(t)] + \psi_{n_j}^{(j)}(s)\chi_1^{(j)}(t)\},$$
$$(j = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(30) \qquad k(s,t) = \sum_{j=1}^{r} k^{(j)}(s,t),$$

$$(31) \qquad H(s,t) = K(s,t) - k(s,t),$$

so werden wieder $H(s,t)$ und $k(s,t)$ zueinander orthogonal, und es gelten die Schlüsse in § 1. Von $\lambda_1$ abgesehen haben $H(s,t)$ und $K(s,t)$ dieselben Eigenwerte, Eigen- und Hauptfunktionen. $k(s,t)$ hat den einzigen Eigenwert $\lambda_1$, und zu diesem Eigenwert gehören dieselben Eigen- und Hauptfunktionen wie bei $K(s,t)$. Nach (28) sind auch die verschiedenen Glieder $k^{(j)}(s,t)$ in (30) zueinander orthogonal. Zu irgendeinem dieser Glieder gehören die Hauptfunktionen mit demselben oberen Index und keine andere.

Eine Darstellung der Hauptfunktionen erhält man in der folgenden Weise. Es sei $\Gamma(s,t)$ eine „Pseudoresolvente", welche der Integralgleichung

$$(32) \qquad \Gamma(s,t) - \lambda_1 \int \Gamma(s,\tau) K(\tau,t)\, d\tau = K(s,t) - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{j=1}^{r} \psi_1^{(j)}(s) h^{(j)}(t)$$

genügt, wo $h^{(1)}(s), \ldots, h^{(r)}(s)$ Funktionen sind, die mit $\psi_1^{(1)}(s), \ldots, \psi_1^{(r)}(s)$ ein normiertes biorthogonales Funktionensystem bilden. Dann erfüllt die Funktion

$$(33) \qquad \varphi(s) = g(s) + \lambda_1 \int g(t)\Gamma(t,s)\, dt$$

die Integralgleichung

$$T(\varphi) = g(s),$$

wenn $(g, \psi_1^{(j)}) = 0 \quad (j = 1, \ldots, r)$ ist. Wenn wiederum $\varphi(s)$ der Integralgleichung

$$J(\varphi) = f(s) \qquad ((f, \chi_1^{(j)}) = 0)$$

genügt, so wird $\varphi(s)$ durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$(34) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda_1 \int \Gamma(s,t) f(t)\, dt + \sum_{j=1}^{r} (\varphi, h^{(j)}) \psi_1^{(j)}(s),$$

wie man leicht findet, auch ohne die Auflösungstheorie zu benutzen.

Demgemäß und nach (20) wird

$$\chi_2^{(i)}(s) = -\chi_1^{(i)}(s) - \lambda_1 \int \chi_1^{(i)}(t)\, \Gamma(t,s)\, dt + \sum_{j=1}^{r} c_1^{(ij)} \chi_1^{(j)}(s),$$

$$\chi_3^{(i)}(s) = \chi_1^{(i)}(s) + 2\lambda_1 \int \chi_1^{(i)}(t)\, \Gamma(t,s)\, dt + \lambda_1^2 \iint \chi_1^{(i)}(t)\, \Gamma(t,\tau)\, \Gamma(\tau,s)\, dt\, d\tau$$

$$- \sum_{j=1}^{r} c_1^{(ij)} \{ \chi_1^{(j)}(s) + \lambda_1 \int \chi_1^{(j)}(t)\, \Gamma(t,s)\, dt \} + \sum_{j=1}^{r} c_2^{(ij)} \chi_1^{(j)}(s).$$

Führen wir die Iterierten $\Gamma^{(2)}(s,t)$, $\Gamma^{(3)}(s,t)$ usw. von $\Gamma(s,t)$ ein, so erhalten wir durch Nullsetzen der willkürlichen Konstanten ein partikuläres Lösungssystem von (20)

$$(35) \quad \chi_k^{(i)}(s) = (-1)^{k-1} \left\{ \chi_1^{(i)}(s) + \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k-1}{m} \lambda_1^m \int \chi_1^{(i)}(t)\, \Gamma^{(m)}(t,s)\, dt \right\}.$$

Die allgemeine Lösung $\chi_k^{(i)}(s)$ erhält man durch Kombination dieser Funktionen nach der Regel

$$\chi_k^{(i)}(s) = \chi_k^{(i)}(s) + \sum_{j=1}^{r} c_1^{(ij)} \chi_{k-1}^{(j)}(s) + \sum_{j=1}^{r} c_2^{(ij)} \chi_{k-2}^{(j)}(s) + \ldots + \sum_{j=1}^{r} c_{k-1}^{(ij)} \chi_1^{(j)}(s),$$

wo jedoch die Konstanten $c_k^{(ij)}$ nicht alle willkürlich sind (vgl. S. 608). $\psi_k^{(i)}(s)$ drückt sich in entsprechender Weise durch lineare Kombination der Partikularlösungen

$$(36) \quad \psi_k^{(i)}(s) = (-1)^{k-1} \left\{ \psi_1^{(i)}(s) + \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k-1}{m} \lambda_1^m \int \Gamma^{(m)}(s,t)\, \psi_1^{(i)}(t)\, dt \right\}$$

aus. Hier wird in bestimmter Weise über die Konstanten verfügt (vgl. S. 608).

(Eingegangen am 25. Juli 1928.)

# Über die charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe.

Von

Kenjiro Shoda in Berlin.

Die Gesamtheit der homomorphen Abbildungen einer endlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ in sich selbst oder in eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$ bildet durch passende Definition der Multiplikation und Addition einen Ring (Automorphismenring), der mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet wird. Die aus den sämtlichen isomorphen Abbildungen (eigentlichen Automorphismen) bestehende Teilmenge von $\mathfrak{o}$ bildet durch Multiplikation eine Gruppe (Automorphismengruppe) $\mathfrak{G}$, die die übliche Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ ist.

Eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ heißt eine $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{B}$ durch jeden Automorphismus aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$ in sich selbst oder in eine Untergruppe von $\mathfrak{B}$ übergeführt wird. Eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe ist eine $\mathfrak{G}$-charakteristische, da $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{o}$ enthalten ist.

Herr A. Chatelet hat in seinem Buch, Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers, Lille 1925, eine Methode gegeben, die sämtlichen $\mathfrak{o}$-charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ zu bestimmen. Er hat weiter gezeigt, daß der aus den Elementen der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ durch Addition (und Subtraktion) abgeleitete Ring $\mathfrak{g}$ mit dem Automorphismenring $\mathfrak{o}$ zusammenfällt, wenn die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ungerade ist. Daher ist die Methode von Herrn A. Chatelet auch für die Bestimmung aller $\mathfrak{G}$-charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{A}$ anwendbar, falls die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ungerade ist[1]).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Ausdehnung der Chateletschen Methode auf endliche Abelsche Gruppen beliebiger Ordnung.

[1]) Vgl. hierzu die Bemerkung am Anfang von § 2.

Als Ausgangspunkt betrachte ich den Automorphismenring $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{A}$, den ich in einer früheren Arbeit[2]) ausführlich durch Matrizen dargestellt habe. Die Beziehung zwischen den beiden Ringen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{g}$ wird in § 1 untersucht. Dabei erhalte ich die genaue Aufklärung der Struktur von $\mathfrak{g}$ (Satz 1) und eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{o}$ zusammenfällt (Satz 2)[3]). Ich gebe in § 2 eine Methode zur Bestimmung der sämtlichen $\mathfrak{G}$-charakteristischen Untergruppen einer beliebigen Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ (Satz 4). Ich erhalte ferner dadurch eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe auch eine $\mathfrak{o}$-charakteristische ist (Satz 5). Die Bedingung $\mathfrak{o} = \mathfrak{g}$ ist dafür offenbar hinreichend, aber sie ist nicht notwendig. In § 3 werden die $\mathfrak{o}$- und $\mathfrak{G}$-charakteristischen Reihen betrachtet. Ich beweise, daß jede $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihe auch eine $\mathfrak{G}$-charakteristische ist (Satz 7). Die Strukturen der Faktorgruppen, die nach dem Jordan-Hölderschen Satz bis auf die Reihenfolge für alle $\mathfrak{G}$-charakteristischen Reihen miteinander isomorph sind, werden daher durch Benutzung einer $\mathfrak{o}$-charakteristischen Reihe erklärt (Satz 8), und es werden Methoden zur Bildung einer $\mathfrak{G}$-charakteristischen Reihe angegeben.

## § 1.

## Der durch $\mathfrak{G}$ erzeugte Ring.

Wir betrachten im folgenden stets eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ mit additiven Verknüpfungen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz und deren Typus $(p^{e_1}, p^{e_2}, \ldots, p^{e_m})$, $e_i \geqq e_{i+1}$, $e_1 = e$ ist, was keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Wir nehmen ferner an, daß unter den $e_j$ genau $n_i$-mal $i$ vorkommt.

Zunächst skizzieren wir die Ergebnisse der früheren Arbeit[2]), § 1. Der Automorphismenring $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{A}$ besteht aus den Matrizen (Automorphismen) von der Gestalt

$$(\mathrm{I}) \qquad P = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \ldots h_{1m} \\ p^{e_1-e_2} h_{21} & h_{22} \ldots h_{2m} \\ p^{e_1-e_3} h_{31} & p^{e_2-e_3} h_{32} \ldots h_{3m} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \end{pmatrix},$$

---

[2]) K. Shoda, Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Annalen **100**. Der dort bewiesene Satz über die Auflösbarkeit der Automorphismengruppe einer Abelschen Gruppe findet sich schon bei A. Ranum, The group of classes of congruent matrices with application to the group of isomorphisms of any abelian group, Trans. of the American Math. Soc. **8**, S. 71—91 (1907). Auf diese Arbeit machte mich Herr I. Schur aufmerksam.

[3]) Interessanter ist der entsprechende Satz in der Theorie der mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen. Vgl. Anmerkung [5]).

wo $h_{ij}$ modulo $p^{e_\lambda}$, $\lambda = \text{Max.}(i,j)$, betrachtet werden soll. Durch Zusammenfassung der Koeffizienten in Teilmatrizen erhält man aus (I)

$$\text{(II)} \qquad P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \dots P_{1e} \\ P_{21} & P_{22} \dots P_{2e} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ P_{e1} & P_{e2} \dots P_{ee} \end{pmatrix},$$

wo der Grad von $P_{ii}$ gleich $n_{e-i+1}$ ist. *Ein Automorphismus $P$ ist dann und nur dann eigentlich, wenn die Determinante von $P$ durch $p$ nicht teilbar ist*, oder, was dasselbe ist, wenn die Determinante von $P_{ii}$ für jedes $i$ mit $n_{e-i+1} \neq 0$ durch $p$ nicht teilbar ist. Die Automorphismengruppe besteht aus den eigentlichen Automorphismen und wird mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet.

Die Summe zweier Elemente von $\mathfrak{G}$, die — wie bei $\mathfrak{o}$ — als die Summe der Matrizen definiert wird, ist in $\mathfrak{o}$ enthalten. Der aus den Elementen von $\mathfrak{G}$ durch Addition und Subtraktion abgeleitete Ring (oder einfacher *der durch $\mathfrak{G}$ erzeugte Ring*) wird mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Der Ring $\mathfrak{g}$ ist offenbar in $\mathfrak{o}$ enthalten.

Wir wollen die Beziehung zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{g}$ untersuchen. Dazu stellt man einen Automorphismus (I) in der Form

$$\text{(1)} \qquad P = \sum_{i,j=1}^{m} h_{ij} R_{ij}$$

dar, wo $R_{ij}$ eine Matrix bedeutet, die man erhält, wenn man in $P$ die Zahlen $h_{\alpha\beta}$ außer $h_{ij}$ alle gleich Null und $h_{ij}$ gleich 1 setzt.

Hilfssatz 1 (von Chatelet)[4]. *$\mathfrak{g}$ ist gleich $\mathfrak{o}$, wenn $p$ ungerade ist.*

Zum Beweis zeigen wir, daß jedes $h_{ij} R_{ij}$ als Summe von eigentlichen Elementen darstellbar ist. Man stelle nämlich $h_{ij} R_{ij}$ für $i \neq j$ in der Form $(h_{ij} R_{ij} + E) - E$ dar, wo $E$ die Einheitsmatrix, also den identischen Automorphismus bedeutet. Dann sind die beiden Elemente $h_{ij} R_{ij} + E$ und $-E$ eigentlich, da ihre Determinanten gleich 1 und $\pm 1$ sind. Wenn $p$ ungerade ist, so kann man eine durch $p$ nicht teilbare Zahl $\alpha$ ($\alpha = 1$ oder $h_{ii}$, je nachdem $h_{ii}$ durch $p$ teilbar ist oder nicht) bestimmen, so daß $h_{ii} R_{ii} + \alpha E$ und $-\alpha E$ eigentlich sind, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *$\mathfrak{g}$ ist gleich $\mathfrak{o}$, wenn $p = 2$ und $n_i$ für jedes $i$ von 1 verschieden ist.*

Jedes $h_{ij} R_{ij}$ ist für $i \neq j$ wie oben als Summe zweier eigentlichen Elemente darstellbar. Wenn $n_i$ für jedes $i$ von 1 verschieden ist, so tritt

[4]) A. Chatelet a. a. O., § 43, S. 101.

in den diagonalen Teilmatrizen $P_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, e$, in (II) keine Matrix vom Grade 1 auf. Man setze $h_{ii}R_{ii} = (h_{ii}R_{ii} + E^*) - E^*$, wo $E^*$ eine Matrix bedeutet, die man erhält, wenn man in der Einheitsmatrix $E$ die $P_{e-e_i+1,\, e-e_i+1}$ entsprechende Einheitsmatrix $E_{e-e_i+1,\, e-e_i+1}$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 1 & 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

ersetzt. Dann sind $h_{ii}R_{ii} + E^*$ und $-E^*$ für jedes $h_{ii}$ eigentlich, da $h_{ii}$ ein Koeffizient von $P_{e-e_i+1,\, e-e_i+1}$ und der Grad von $P_{e-e_i+1,\, e-e_i+1}$ größer als 1 ist.

Es sei $n_{e_{t_1}} = n_{e_{t_2}} = \ldots = n_{e_{t_d}} = 1$ und die anderen $n_i \neq 1$. In (I), wobei jetzt $p = 2$, sei $h_{t_it_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$, durch $p = 2$ teilbar. Die Gesamtheit der $P$ mit dieser Beschränkung bildet auch einen Ring $\mathfrak{g}^*$, was direkt daraus folgt, daß der Grad der $h_{t_it_i}$ enthaltenden Teilmatrix $P_{e-e_{t_i}+1,\, e-e_{t_i}+1}$ gleich 1 ist und daß die Koeffizienten von $P_{ij}$ für $i > j$ durch $p = 2$ teilbar sind.

Satz 1. *Der durch* $\mathfrak{g}^*$ *und das Einheitselement* $E$ *erzeugte Ring ist gleich dem durch* $\mathfrak{G}$ *erzeugten Ring* $\mathfrak{g}$.

Ein Element $h_{ii}R_{ii}$ ist stets als Summe zweier eigentlichen Elemente $h_{ii}R_{ii} + E$ und $-E$ darstellbar, wenn $h_{ii}$ gerade ist. Nach dem Beweis von Hilfssatz 2 enthält also $\mathfrak{g}$ den Ring $\mathfrak{g}^*$ und $E$. Der durch $\mathfrak{g}^*$ und $E$ erzeugte Ring enthält aber $\mathfrak{G}$. Denn ist $P$ ein Element von $\mathfrak{G}$, so ist $P + E$ und daher $P$ in diesem Ring enthalten.

Hilfssatz 3. $\mathfrak{g}$ *ist gleich* $\mathfrak{o}$, *wenn nur ein* $n_{e_i}$ *unter den* $n_j$ *gleich* 1 *ist.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß $R_{ii}$ in $\mathfrak{g}$ enthalten ist, was aber daraus folgt, daß $R_{ii} + E$ in $\mathfrak{g}^*$ und daher in $\mathfrak{g}$ enthalten ist.

Wenn $p = 2$ und zwei $n_{e_j}$, $n_{e_i}$ gleich 1 sind, so ist $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden. Denn die Summe $h_{jj} + h_{ii}$ ist dann nach Satz 1 stets gerade, wenn $P$ in $\mathfrak{g}$ enthalten ist. $R_{jj}$ und $R_{ii}$ sind also in $\mathfrak{g}$ nicht enthalten. Durch Zusammenfassung erhält man[5])

Satz 2. *Der Ring* $\mathfrak{g}$ *ist dann und nur dann gleich* $\mathfrak{o}$, *wenn* $p$ *ungerade ist oder wenn* $p = 2$ *und höchstens nur ein* $n_i$ *gleich* 1 *ist.*

---

[5]) Der entsprechende Satz über den zugeordneten Ring einer Matrix, d. h. den Ring, der aus der Gesamtheit der mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen besteht, lautet so: *Der zugeordnete Ring einer Matrix* $A$ *wird dann und nur dann durch Matrizen (die natürlich mit* $A$ *vertauschbar sind) mit nicht verschwindenden Determinanten erzeugt, wenn der betreffende Körper mindestens zwei von Null verschiedene Elemente enthält oder*

## § 2.

## Charakteristische Untergruppen.

Eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ heißt eine $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-*charakteristische Untergruppe* von $\mathfrak{A}$, wenn sie bei jedem Automorphismus aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$ in sich selbst oder in eine homomorphe Untergruppe übergeführt wird, was man symbolisch mit $\mathfrak{o} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{G} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ bezeichnen kann, da $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$ das Einheitselement $E$ enthält. Sind $P$ und $Q$ zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{o}$, so ist $(P+Q) \times \mathfrak{B} = P \times \mathfrak{B} + Q \times \mathfrak{B}$. Daher folgt aus $\mathfrak{G} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{g} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. Aus Satz 2 folgt nun

Hilfssatz 4. *Jede $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe ist auch eine $\mathfrak{o}$-charakteristische, wenn $p$ ungerade ist oder wenn $p = 2$ und höchstens nur ein $n_i$ gleich* 1 *ist.*

Die Basis $R_r$ von $\mathfrak{A}$ (d. h. die einspaltige Matrix, deren Koeffizienten die normalen Basiselemente von $\mathfrak{A}$ sind) wird durch eine Matrix $B$[6]) in $BR_r$ transformiert. Die Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ mit der Basis $BR_r$ nennt man die durch $B$ definierte Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Für jede Untergruppe $\mathfrak{B}$ gibt es stets eine Matrix $B$, die $\mathfrak{B}$ definiert. Eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ wird ferner stets durch einen rechten Teiler $B$ von $F$ definiert, d. h. es gibt eine ganzzahlige Matrix $B^*$ derart, daß $F = B^* B$ ist. Dabei bedeutet $F$ eine Diagonalmatrix

$$F = \begin{pmatrix} p^{e_1} & & & \\ & p^{e_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{e_m} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

die durch die vorgegebene Gruppe $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt wird, und für die $FR_r = 0$ ist.

Wir wollen nun eine Methode entwickeln, die sämtlichen $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{A}$ zu bestimmen. Es sei $\mathfrak{B}$ eine durch

---

*wenn für jeden irreduziblen Faktor $q(x)$ der charakteristischen Determinante $|xE - A|$ höchstens nur ein $n_i$ gleich* 1 *ist, wo $n_i$ die Anzahl der Elementarteiler $q(x)^i$ bedeutet.* Vgl. hierzu die Bemerkung am Schluß der Einleitung der Arbeit[2]) und K. Shoda, Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen, Math. Zeitschr. 29, dort wird der zugeordnete Ring einer Matrix gruppentheoretisch untersucht. Herr W. Krull hat in seiner Dissertation (Freiburg i. Br. 1921, Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie) bewiesen, daß der zugeordnete Ring einer Matrix durch Matrizen mit nicht verschwindenden Determinanten erzeugt wird, wenn der Körper unendlich viele Elemente enthält.

[6]) Unter einer Matrix verstehen wir im folgenden schlechthin eine ganzzahlige Matrix. Gebrochene Matrizen treten nur als reziproke Matrizen der ganzzahligen Matrizen oder als $S$ von der Form (7) auf.

$B$ definierte Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Die Basis $BR_r$ von $\mathfrak{B}$ wird durch einen Automorphismus $P$ aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$ in $BPR_r$ transformiert. Ist $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$, so müssen die Elemente (die Koeffizienten der einspaltigen Matrix $BPR_r$) in $\mathfrak{B}$ enthalten sein. D. h. es gibt eine Matrix $P'$, so daß $BPR_r = P'BR_r$ ist. Da die Basiselemente von $\mathfrak{A}$ (die Koeffizienten von $R_r$) linear unabhängig sind, so ist

$$BP = P'B + XF, \tag{3}$$

wo $X$ eine Matrix bedeutet. Wenn umgekehrt $B$ für jedes Element $P$ aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$ der Bedingung (3) genügt, so ist die durch $B$ definierte Untergruppe $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe.

Hilfssatz 5 (von Chatelet)[7]. *Damit eine Matrix $B$ eine $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe definiert, ist notwendig und hinreichend, daß $B$ für jedes Element $P$ aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$ der Bedingung (3) genügt.*

Durch passende Transformation der Basis von $\mathfrak{B}$ kann man $B$ auf die Form

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} \tag{4}$$

bringen, wo $b_{ij} < b_{jj}$ und $b_{jj}$ eine Potenz von $p$ ist. Ist $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$, so ist nach Hilfssatz 5 für jeden Automorphismus $P$ aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$ stets

$$BPB^{-1} = P' + XB^* \tag{5}$$

eine ganzzahlige Matrix, da $BP = P'B + XB^*B$ ist. Denn in der Tat ist $B$ ein Faktor von $F$, also existiert die reziproke Matrix. Ist umgekehrt $BPB^{-1}$ ganz, so genügen $B$ und $P$ der Bedingung (3).

Setzt man in (5) $P = \varepsilon R_{mm}$ (vgl. (1)), so ist

$$\varepsilon BR_{mm}B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \varepsilon b_{1m}/b_{mm} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon b_{m-1\,m}/b_{mm} \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Wir bestimmen zuerst die sämtlichen $\mathfrak{o}$-charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{A}$. Da $R_{mm}$ in $\mathfrak{o}$ enthalten ist, so setze man in (6) $\varepsilon = 1$. Da $b_{im} < b_{mm}$ ist, so muß $b_{im} = 0$ sein. Man kann analog behaupten, daß

[7]) A. Chatelet, a. a. O. § 66, S. 162.

$b_{ij} = 0$ für $i \neq j$ ist. $B$ ist also eine Diagonalmatrix. Setzt man nun in (5) $P = R_{ij} = p^{e_j - e_i} E_{ij}$ bzw. $P = R_{ji} = E_{ji}$ für $i > j$, so ist

$$B p^{e_j - e_i} E_{ij} B^{-1} = \frac{b_{ii}}{b_{jj}} p^{e_j - e_i} E_{ij} \qquad \text{bzw.} \qquad B E_{ji} B^{-1} = \frac{b_{jj}}{b_{ii}} E .$$

Zusammenfassend erhält man also

Satz 3 (von Chatelet)[8]. *Eine Matrix $B$ von der Form (4) definiert dann und nur dann eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe, wenn ihre Koeffizienten den Bedingungen für $i \geqq j$*

$$p^{e_j - e_i} b_{ii} \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, b_{jj}), \qquad b_{jj} \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, b_{ii}), \qquad b_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

*genügen.*

Wir bestimmen nun die sämtlichen $\mathfrak{G}$-charakteristischen Untergruppen, die nicht $\mathfrak{o}$-charakteristische zu sein brauchen. Wir nehmen dazu nach Satz 3 und Hilfssatz 4 an, daß $p = 2$ ist, und betrachten statt $\mathfrak{G}$ den Ring $\mathfrak{g}$. Eine Matrix $B$ von der Form (4) definiere eine $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Die Koeffizienten $b_{ij}$ sind dann gleich Null, wenn $n_{e_j} \neq 1$ ist, da dann $R_{ii}$ in $\mathfrak{g}$ enthalten ist. Ein Element $2 R_{ii}$ ist aber für jedes $i$ nach Satz 1 in $\mathfrak{g}$ enthalten. Setzt man in (6) $\varepsilon = 2$, so erkennt man, daß $2 b_{im}$ durch $b_{mm}$ teilbar ist. Allgemeiner ist jedes $2 b_{ij}$ durch $b_{jj}$ teilbar, da in der $j$-ten Spalte von $2 B R_{jj} B^{-1}$ die Zahlen $2 b_{ij}/b_{jj}$, $j \leqq i$, vorkommen. Da $b_{ij}$ kleiner als $b_{jj}$ ist, so muß also $2 b_{ij} = b_{jj}$ oder $b_{ij} = 0$ sein. Die Matrix $B$ hat also die Gestalt

$$(7) \qquad B = S B_1 = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & \cdots & s_{1m} \\ 0 & 1 & s_{23} & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\ & b_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & b_{mm} \end{pmatrix},$$

wo $s_{ij} = 0$, falls $n_{e_j} \neq 1$; und $s_{ij} = 0$ oder $\frac{1}{2}$, falls $n_{e_j} = 1$. Ihre reziproke Matrix $B^{-1}$ hat dann die Gestalt

$$B^{-1} = B_1^{-1} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/b_{11} & & & \\ & 1/b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1m} \\ 0 & 1 & t_{23} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei kann man $t_{jk}$ durch die Gleichungen

$$\sum_{j=i}^{k} s_{ij} t_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad i < k$$
$$= 1 \quad \text{für} \quad i = k$$

[8]) A. Chatelet, a. a. O. § 67, S. 165.

bestimmen, wo $s_{ii}=1$ ist. Es ist also [9])

$$(8)\qquad t_{i,i+\delta}=\begin{vmatrix} -s_{i,i+1} & s_{i,i+2} & \cdots & (-1)^{\delta} s_{i,i+\delta} \\ 1 & -s_{i+1,i+2} & \cdots & (-1)^{\delta-1} s_{i+1,i+\delta} \\ 0 & 1 & \cdots & (-1)^{\delta-2} s_{i+2,i+\delta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -s_{i+\delta-1,i+\delta} \end{vmatrix}.$$

Es sei $t_{jk}$ eine reduzierte gebrochene Zahl. Wir führen nun vier Systeme von Zahlen ein. Es sei $M_j(t)$ bzw. $M^{(j)}(t)$ der maximale Nenner (das kleinste positive gemeinsame Vielfache von Nennern) von $t_{jj}=1, t_{j,j+1}, \ldots, t_{jm}$ bzw. $t_{jj}=1, t_{j-1,j}, \ldots, t_{1j}$. Man definiere entsprechend $M_i(s)$ und $M^{(i)}(s)$. Dann sind offenbar $M_i(s)$ und $M^{(i)}(s)$ gleich 1 oder 2.

Da $2BR_{ii}B^{-1}$ für jedes $i$ ganz ist, so ist 2 durch $M^{(i)}(s)\,M_i(t)$ teilbar. Denn es ist $2BR_{ii}B^{-1}=2SB_1R_{ii}B_1^{-1}S^{-1}=2SR_{ii}S^{-1}$, deren Koeffizienten also gleich Null oder $2s_{ki}t_{ij}$, $k\leqq i\leqq j$ sind. Ist $M^{(i)}(s)=2$, so muß also $M_i(t)=1$ sein. Nach (8) ist also dann $M_i(s)=1$. Daraus folgt weiter $t_{i,i+\delta}=-s_{i,i+\delta}$. Denn nach (8) ist $t_{i,i+\delta}=0$, falls $s_{i,i+\gamma}$ für jedes $\gamma$ gleich Null ist. Sind etwa $s_{i,i+\gamma_1}, s_{i,i+\gamma_2}, \ldots$ gleich $\frac{1}{2}$, so sind $s_{i+\gamma_1,\beta_1}, s_{i+\gamma_2,\beta_2}, \ldots$ alle gleich Null, und nach (8) ist $t_{i,i+\delta}=-s_{i,i+\delta}$. Im besonderen ist $M_i(s)=M_i(t)$.

Man kann nun wie bei den $\mathfrak{o}$-charakteristischen Untergruppen vorgehen. Für $i>j$ sind

$$B\,2^{e_j-e_i}E_{ij}B^{-1}=2^{e_j-e_i}\frac{b_{ii}}{b_{jj}}\sum_{k,l}s_{ki}t_{jl}E_{kl},$$

$$B\,E_{ji}B^{-1}=\frac{b_{jj}}{b_{ii}}\sum_{k,l}s_{kj}t_{il}E_{kl}.$$

Daher müssen $2^{e_j-e_i}\frac{b_{ii}}{b_{jj}}s_{ki}t_{jk}$ und $\frac{b_{jj}}{b_{ii}}s_{kj}t_{il}$ für alle $k$, $l$ ganz sein. Man kann nun behaupten[10]):

Satz 4. *Eine ganzzahlige Matrix $B$ von der Form (4) definiert dann und nur dann eine $\mathfrak{S}$-charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$, wenn sie die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & \cdots & s_{1m} \\ 0 & 1 & s_{23} & \cdots & s_{2m} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & s_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\ & b_{22} & & & \\ & & b_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_{mm} \end{pmatrix}$$

[9]) In der Tat werden die Koeffizienten $t_{i\,i+\delta}$ der reziproken Matrix einer Matrix von der Form $S$ mit beliebigen Koeffizienten $s_{ij}$, $s_{ii}=1$, allgemein durch die Determinanten (8) gegeben.

[10]) Sind alle $s_{ij}$ gleich Null, so fällt dieser Satz mit Satz 3 zusammen.

*hat, wo* $s_{ij} = 0$ *oder* $\frac{1}{2}$ *ist, und ihre Koeffizienten den Bedingungen*

$$\begin{aligned} p^{e_j - e_i} b_{ii} &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } b_{jj} M_j(s) M^{(i)}(s)) \\ b_{jj} &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } b_{ii} M_i(s) M^{(j)}(s)) \\ 2 &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } M_i(s) M^{(i)}(s)) \end{aligned}$$

*genügen, wo* $i > j$ *ist.*

Ist nämlich $p$ ungerade, so ist jedes $s_{ij}$ gleich Null, da $B$ ganz ist. Dieser Satz wird dann auf Satz 3 reduziert. Für $p = 2$ sind die Bedingungen, wie wir gesehen haben, notwendig. Um zu beweisen, daß sie auch hinreichend sind, genügt es zu zeigen, daß aus unseren Bedingungen folgt: Ist $R_{i_1}$ in $\mathfrak{g}$ enthalten, so ist $M_i(s) = M^{(i)}(s) = 1$. Denn unsere Bedingungen sind hinreichend dafür, daß $B$ für $P = R_{ij}$, $i \neq j$, $P = 2R_{ii}$ der Bedingung (3) genügt; und aus $M_i(s) = M^{(i)}(s) = 1$ folgt, daß die Bedingung (3) auch durch $P = R_{ii}$ erfüllt ist[11]).

Setzt man nämlich $e_i = e_j$ in Satz 4, so ergibt sich

$$b_{ii} \equiv 0 \pmod{b_{jj} M_j(s) M^{(i)}(s)}, \qquad b_{jj} \equiv 0 \pmod{b_{ii} M_i(s) M^{(j)}(s)}.$$

Daraus folgt $M_i(s) = M^{(i)}(s) = M_j(s) = M^{(j)}(s) = 1$. Wenn nur ein $n_i = 1$ ist, so ist also $s_{ij} = s_{ji} = 0$ für jedes $j$ und daher $M_i(s) = M^{(i)}(s) = 1$. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus Satz 4 folgt sofort[12])

Satz 5. *Damit jede* $\mathfrak{G}$*-charakteristische Untergruppe stets eine* $\mathfrak{o}$*-charakteristische ist, ist notwendig und hinreichend, daß* $p$ *ungerade ist, oder daß* $p = 2$ *und höchstens ein* $n_i$ *oder zwei benachbarte* $n_i$ *und* $n_{i+1}$ *gleich* 1 *sind.*

Der Typus der durch (7) definierten $\mathfrak{G}$-charakteristischen Untergruppe ist $(p^{e_1}/b_{11}, p^{e_2}/b_{22}, \ldots, p^{e_m}/b_{mm})$, also gleich dem Typus der durch die Diagonalmatrix mit Koeffizienten $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mm}$ definierten $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe. Denn $p^{e_j} b_{ii} s_{ji}$ ist durch $p^{e_i} b_{jj}$ teilbar, was aus der ersten Bedingung von Satz 4 folgt. Also erhält man

Satz 6. *Jede* $\mathfrak{G}$*-charakteristische Untergruppe ist mit einer* $\mathfrak{o}$*-charakteristischen Untergruppe isomorph.*

---

[11]) Vgl. hierzu Satz 1, der besagt: Dann und nur dann ist $R_{ii}$ in $\mathfrak{g}^*$ enthalten, wenn $e_i = e_j$ für irgendein $j$ ist.

[12]) Beispiel: $\mathfrak{A}$ sei eine Abelsche Gruppe vom Typus $(2^\alpha, 2^\beta)$, $\alpha \geqq \beta$. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{22}}{2} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$ definiere eine $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Dann ist nach Satz 4 also $2^{\alpha-\beta} b_{22} \equiv 0 \pmod{2^2 b_{11}}$ und $b_{11} \equiv 0 \pmod{b_{22}}$. Daher muß $\alpha - \beta \leqq 2$ sein. Es sei nun $\alpha - \beta = \delta + 2$, $\delta \geqq 0$. Dann ist $2^\delta b_{22} \equiv 0 \pmod{b_{11}}$. Es kann also $2^\varkappa b_{22} = b_{11}$ sein, wo $\delta \geqq \varkappa \geqq 0$. Für eine Abelsche Gruppe vom Typus $(2^\alpha, 2^\beta)$, $\alpha - \beta = \delta + 2$, gibt es genau $(\delta+1)\beta$ $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppen, die keine $\mathfrak{o}$-charakteristische sind. Denn $b_{22}$ kann die Werte $2, 2^2, \ldots, 2^\beta$ annehmen.

## § 3.

## Charakteristische Reihe.

Eine Reihe von $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{A}$ heißt eine $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristische Reihe von $\mathfrak{A}$, wenn jede in der vorhergehenden enthalten ist, und zwar gibt es zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern keine $\mathfrak{o}$- bzw. $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Eine $\mathfrak{G}$-charakteristische Reihe ist auch eine $\mathfrak{o}$-charakteristische, wenn jedes Glied eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe ist; dies folgt direkt daraus, daß jede $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe auch eine $\mathfrak{G}$-charakteristische ist. Man kann behaupten[13]):

Satz 7. *Jede $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihe ist stets eine $\mathfrak{G}$-charakteristische Reihe.*

Dieser Satz ist offenbar richtig, wenn $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{o}$ zusammenfällt, also, wenn $p$ ungerade ist. Es sei daher $p = 2$ und $B$ eine Matrix von der Form (7), die eine $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ definiert. Wir führen nun zwei Untergruppen $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{B}}$ ein, die durch $\overline{B}$ und $\underline{B}$ definiert werden, wo $\overline{B}$ bzw. $\underline{B}$ eine Diagonalmatrix mit Koeffizienten

$$b_{11}/M^{(1)}(s),\quad b_{22}/M^{(2)}(s),\ldots,\quad b_{mm}/M^{(m)}(s)$$

bzw. $$b_{11}M_1(s),\ b_{22}M_2(s),\ldots,b_{mm}M_m(s)$$

bedeutet.

Hilfssatz 6. *Die beiden $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{B}}$ sind $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppen.*

Der Beweis ergibt sich direkt nach den Sätzen 3, 4.

Hilfssatz 7. *Jede durch eine Diagonalmatrix definierte Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die zugleich eine Untergruppe bzw. eine Obergruppe von $\mathfrak{B}$ ist, ist eine Untergruppe bzw. eine Obergruppe von $\overline{\mathfrak{B}}$ bzw. $\underline{\mathfrak{B}}$.*

Es sei nämlich $U$ eine Diagonalmatrix. Dann und nur dann ist die Gleichung $U = XB$ bzw. $B = XU$ durch ganzzahlige $X$ auflösbar, wenn $U = Y\overline{B}$ bzw. $\underline{B} = YU$ ist, wo $Y$ eine ganzzahlige Diagonalmatrix bedeutet.

---

[13]) Dieser Satz folgt auch aus Satz 6 und daraus, daß aus $e_i = e_j$ nach Satz 4 auch $b_{ii} = b_{jj}$ folgt, wenn man den Jordan-Hölderschen Satz für $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihen als bekannt voraussetzt, der bei unserem Fall nach diesem Satz in den altbekannten Jordan-Hölderschen Satz für $\mathfrak{G}$-charakteristische Reihen übergeht. Der Beweis des allgemeinen Jordan-Hölderschen Satzes findet sich in E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlen- und Funktionenkörper. § 10, Math. Annalen **96**, W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsberichte Heidelberg, 1926.

Wir beweisen nun Satz 7. Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_t^*, \mathfrak{A}_{t-1}^*, \ldots, \mathfrak{A}_1^*$ eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihe. Wenn eine $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}_i^*$ enthalten ist und $\mathfrak{A}_{i-1}^*$ enthält, so muß $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}_i^*$ und $\underline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}_{i-1}^*$ sein. Denn sonst existiert $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}$ nach Hilfssatz 7 zwischen $\mathfrak{A}_i^*$ und $\mathfrak{A}_{i-1}^*$, was nach der Voraussetzung unmöglich ist, da nach Hilfssatz 6 $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{B}}$ beide $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppen sind. Die durch die Diagonalmatrix mit Koeffizienten $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mm}$ definierte $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe $\mathfrak{B}_1$ ist aber in $\overline{\mathfrak{B}}$ enthalten und enthält $\underline{\mathfrak{B}}$. Also ist $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_1$ oder $\underline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_1$, d. h. alle $M^{(i)}(s)$ oder alle $M_i(s)$ sind gleich 1. Daher ist $B$ eine Diagonalmatrix und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$, was zu beweisen war.

Wir beweisen nun

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_t^*, \mathfrak{A}_{t-1}^*, \ldots, \mathfrak{A}_0^* = 0$, $\mathfrak{A}_i^* = \mathfrak{A}_1 \widehat{\mathfrak{A}_2} \ldots \widehat{\mathfrak{A}_i}$ [14]), *eine* $\mathfrak{G}$*-charakteristische Reihe von* $\mathfrak{A}$, *so ist* $\mathfrak{A}_i$ *eine Gruppe von der Ordnung* $p^{n_{e_j}}$ *und vom Typus* $(p, p, \ldots, p)$ [15]), *die in der Kompositionsreihe* $\mathfrak{A}_t, \mathfrak{A}_{t-1}, \ldots, \mathfrak{A}_1$ *genau* $e_j$*-mal auftritt. Die Anzahl* $t$ *der Glieder ist gleich der Summe der verschiedenen Exponenten in den Invarianten von* $\mathfrak{A}$.

Nach dem bekannten Jordan-Hölderschen Satz genügt es, diesen Satz für eine einzige, also insbesondere eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihe zu beweisen, da nach Satz 7 jede $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihe auch eine $\mathfrak{G}$-charakteristische ist. Entsprechend der gegebenen Reihe $\mathfrak{A}_t^*, \mathfrak{A}_{t-1}^*, \ldots, \mathfrak{A}_0^*$ gibt es eine Reihe von Diagonalmatrizen $A_t, A_{t-1}, \ldots, A_0$, so daß $A_i$ die Untergruppe $\mathfrak{A}_i^*$ definiert. Definiert allgemein eine Diagonalmatrix $B$ mit Koeffizienten $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mm}$ eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe $\mathfrak{B}$, so folgt aus $e_i = e_j$ auch $b_{ii} = b_{jj}$. $B$ und daher $\mathfrak{B}$ wird also durch die verschiedenen Exponenten der Koeffizienten von $B$ eindeutig bestimmt. Wir betrachten also die verschiedenen Exponenten von $p$ in den Invarianten von $\mathfrak{A}$ (was dasselbe ist, in den Koeffizienten von $F$). Es sei nämlich

$$e_1 = e_2 = \ldots = e_{k_1} > e_{k_1+1} = \ldots = e_{k_2} > \ldots > e_{k_{d-1}+1} = \ldots = e_{k_d}, \quad k_d = m.$$

Dabei ist also $n_{e_{k_1}} = k_1$, $n_{e_{k_2}} = k_2 - k_1, \ldots, n_{e_{k_d}} = k_d - \sum_{i=1}^{d-1} k_i$. Man bilde eine Reihe von Zahlensystemen mit $d$ Zahlen

$$\begin{array}{llll} (0,0, & \ldots, 0,0) & (1,0, & \ldots, 0,0) \ \ldots (1,1,\ldots,1,0) \\ (1,1, & \ldots, 1,1) & (2,1, & \ldots, 1,1) \ \ldots (2,2,\ldots,2,1) \\ & \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (e-1, & \ldots, e-1) & (e, e-1, & \ldots, e-1) \ \ldots (e,e,\ldots,e,e-1) \end{array} \tag{9}$$

und setze in einem Zahlensystem $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$ $a_i = e_{k_i}$, falls $a_i \geqq e_{k_i}$ ist.

[14]) Wir gebrauchen hier die Schreibweise von Herrn W. Krull, a. a. O., also ist $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_i^* / \mathfrak{A}_{i-1}^*$. Die dadurch gebildete Reihe $\mathfrak{A}_t, \mathfrak{A}_{t-1}, \ldots, \mathfrak{A}_1$ heißt eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{A}$.

[15]) Vgl. Burnside, Theory of groups of finite order, 2. Aufl. S. 109.

Es sei $(c_1, c_2, \ldots, c_d)$ eines unserer so konstruierten Zahlensysteme. Dann genügen

$$b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{k_1 k_1} = p^{c_1},\ b_{k_1+1, k_1+1} = \ldots = b_{k_2 k_2} = p^{c_2}, \ldots,$$
$$b_{k_{d-1}+1, k_{d-1}+1} = \ldots = b_{k_d k_d} = p^{c_d}$$

den Bedingungen des Satzes 3. Denn dann ist offenbar $c_i - c_j \leqq e_i - e_j$ für $i \leqq j$ und daher $p^{e_{k_i} - e_{k_j}} p^{c_j} \equiv 0 \pmod{p^{c_i}}$. Eine Diagonalmatrix $B$ mit Koeffizienten $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mm}$ definiert also eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe. Entsprechend den Zahlensystemen (9) erhält man also eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihe $\mathfrak{A}_t^*, \mathfrak{A}_{t-1}^*, \ldots, \mathfrak{A}_0^*$. Denn zwischen den benachbarten Gliedern existiert keine $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe, was aus der Konstruktion von (9) folgt, da für jede Diagonalmatrix $B$ stets $b_{k_i+1, k_i+1} = \ldots = b_{k_{i+1}, k_{i+1}}$ ist, falls $B$ eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Untergruppe definiert. Man bilde nun die Kompositionsreihe $\mathfrak{A}_t, \mathfrak{A}_{t-1}, \ldots, \mathfrak{A}_1$. Dann erkennt man leicht die Richtigkeit des Satzes, da die $i$-ten Zahlen der Systeme (9) die Werte $0, 1, \ldots, e_{k_i}$ haben.

Zusatz 1. *Ist $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe, die keine $\mathfrak{o}$-charakteristische ist, so enthält jede $\mathfrak{B}$ als ein Glied enthaltende $\mathfrak{G}$-charakteristische Reihe mindestens als Glieder $\sum_{i=1}^{m} M_i(s) M^{(i)}(s) - (m+1)$ aufeinanderfolgende $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppen, die keine $\mathfrak{o}$-charakteristischen sind.*

In einer $\mathfrak{G}$-charakteristischen Reihe, die $\mathfrak{B}$ als ein Glied enthält, seien $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{D}$, zwei $\mathfrak{o}$-charakteristische Glieder derart, daß zwischen $\mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ kein $\mathfrak{o}$-charakteristisches Glied existiert. Es gibt aber nach Hilfssatz 7 ein $\bar{\mathfrak{B}}$ bzw. $\underline{\mathfrak{B}}$ derart, daß $\mathfrak{C} \geqq \bar{\mathfrak{B}} > \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B} > \underline{\mathfrak{B}} \geqq \mathfrak{D}$. Um die minimale Anzahl der aufeinanderfolgenden $\mathfrak{G}$-charakteristischen Glieder, die keine $\mathfrak{o}$-charakteristischen sind, zu finden, genügt es also, eine $\mathfrak{G}$-charakteristische Reihe zu betrachten, die $\bar{\mathfrak{B}}, \mathfrak{B}, \underline{\mathfrak{B}}$ als Glieder enthält. Da $\bar{B}^{-1} \underline{B}$ eine Diagonalmatrix mit Koeffizienten $M_i(s) M^{(i)}(s)$ ist, so wird die verlangte Anzahl durch den Exponenten $\delta$ von 2 in $\prod_{i=1}^{m} M_i(s) M^{(i)}(s)$ gegeben. Denn $M_i(s) M^{(i)}(s)$ kann nach Satz 4 nur dann gleich 2 sein, wenn $n_{e-e_i+1}$ gleich 1 ist. Da $M_i(s) M^{(i)}(s)$ nach der dritten Bedingung des Satzes 4 gleich 1 oder 2 ist, so ist also $\delta = \sum_{i=1}^{m} M_i(s) M^{(i)}(s) - (m+1)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Alle $\mathfrak{o}$-charakteristischen Reihen kann man nach Satz 3 wie beim Beweis des Satzes 8 konstruieren. Es seien $\mathfrak{B}$ und ihre Untergruppe $\mathfrak{B}'$ zwei durch $B = S B_1$ und $B' = S' B'$ (vgl. (7)) definierte aufeinanderfolgende Glieder einer $\mathfrak{G}$-charakteristischen Reihe. Dann definieren $B_1$

und $B_1'$ zwei aufeinanderfolgende Glieder einer $\mathfrak{o}$-charakteristischen Reihe und $B_1' = DB_1$, wo $D$ eine Diagonalmatrix bedeutet, die entsprechend der Zerlegung (II) die Teilmatrizen $E_{11}$, $E_{22}$, …, $E_{e-e_d,\,e-e_d}$, $2E_{e-e_d+1,\,e-e_d+1}$, $E_{e-e_d+2,\,e-e_d+2}$, …, $E_{ee}$ enthält, was aus den Sätzen 6, 8 unmittelbar folgt. Damit ist die Beziehung zwischen $B_1$ und $B_1'$ aufgeklärt.

Die Beziehung zwischen $S$ und $S'$ wird im folgenden untersucht, so daß man dadurch die Beziehung zwischen $B$ und $B'$ erkennen und alle $\mathfrak{G}$-charakteristischen Reihen (die eine vorgegebene $\mathfrak{G}$-charakteristische Untergruppe als ein Glied enthalten) konstruieren kann.

Aus der dritten Bedingung des Satzes 4 folgt

$$S^{-1} = 2E - S, \quad S^2 = 2S - E, \quad (S-E)^2 = 0. \tag{10}$$

Da $\mathfrak{B}'$ eine Untergruppe von $\mathfrak{B}$ ist, so gibt es eine Matrix $X$, so daß $B' = XB$, also $S'DB_1 = XSB_1$, $X = S'DS^{-1}$ ist. Es ist also nach (10) $S'DS^{-1} = S'D(2E - S)$ und daher $S'DS$ ganz.

Man zerlege nun $S$ (und entsprechend $S'$, $D$, $B$) in der Form

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ 0 & S_{22} & S_{23} \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

wo der Grad von $S_{11}$, $S_{22}$, $S_{33}$ gleich

$$\sum_{k=1}^{d-1} n_{e_k}, \qquad n_{e_d}, \qquad \sum_{k=d+1}^{m} n_{e_k}$$

ist. Dann erkennt man die folgenden Beziehungen zwischen den Teilmatrizen

$$S_{22} = E_{22}, \qquad S_{11}S_{1i} = S_{1i}, \qquad S_{i3}S_{33} = S_{i3}. \tag{12}$$

Ist nämlich der Grad von $S_{22}$ gleich 1, so ist die erste Behauptung klar. Ist der Grad von $S_{22}$ größer als 1, so muß aber nach dem Beweis von Satz 4 auch $S_{22} = E$ (dann ist weiter $S_{12} = 0$, $S_{23} = 0$). Die zweite und dritte Behauptung folgen aus der dritten Bedingung von Satz 4, die auch durch $s_{ij}s_{ki} = 0$ gegeben wird.

Man rechne das Produkt $S'DS$ aus. Da $2S$ und $2S'$ ganz sind, so sind

$$S_{11}'S_{11}, \quad S_{33}'S_{33}, \quad S_{11}'S_{12}, \quad S_{23}'S_{33}, \quad S_{11}'S_{13} + 2S_{12}'S_{23} + S_{13}'S_{33}$$

alle ganz. Es ist dann

$$S_{11} = S_{11}' \quad \text{und} \quad S_{33} = S_{33}',$$

woraus folgt, daß

$$S_{11}'S_{12} = S_{11}S_{12} = S_{12}, \qquad S_{23}'S_{33} = S_{23}'S_{33}' = S_{23}',$$
$$S_{11}'S_{13} + 2S_{12}'S_{23} + S_{13}'S_{33} = S_{13}' + S_{13} + 2S_{12}'S_{23}$$

ganz und daher

$$S_{12} = 0 \quad \text{und} \quad S'_{23} = 0$$

sind. Diese Bedingungen sind ersichtlich hinreichend. Also erhält man

Hilfssatz 8. *Die durch* $B' = S'DB_1$ *definierte* $\mathfrak{G}$*-charakteristische Untergruppe* $\mathfrak{B}'$ *ist dann und nur dann in der durch* $B = SB_1$ *definierten* $\mathfrak{G}$*-charakteristischen Untergruppe* $\mathfrak{B}$ *enthalten, wenn*

$$S_{11} = S'_{11}, \quad S_{33} = S'_{33}, \quad S_{12} = 0, \quad S'_{23} = 0, \quad S_{13} + S'_{13} + 2S'_{12}S_{23}$$

*ganz sind.*

Ist $S'_{12}$ oder $S_{23}$ gleich Null, so bedeutet die letzte Bedingung, daß $S_{13} + S'_{13}$ ganz ist, woraus $S_{13} = S'_{13}$ folgt, da die Koeffizienten von $S_{13}$ und $S'_{13}$ gleich $\frac{1}{2}$ oder Null sind. *Sind* $S'_{12}$ *und* $S_{23}$ *beide gleich Null — wie es immer der Fall ist, wenn der Grad von* $S_{22}$ *größer als* 1 *ist —, so ist also* $S = S'$.

(Eingegangen am 26. Oktober 1928.)

# Eine kennzeichnende Eigenschaft der ebenen algebraischen Kurven $n$-ter Ordnung.

Von

Tadahiko Kubota in Sendai.

1. In dieser Note möchte ich den folgenden Satz beweisen, den ich für den Spezialfall $n = 3$ bereits bewiesen habe[1]).

*Wenn eine ebene Kurve $n$-ter Ordnung*[2]) *durch beliebige Schar von parallelen Geraden in $n$ Punkten geschnitten wird, so daß der Schwerpunkt der $n$ Schnittpunkte eine Gerade beschreibt, so ist die Kurve notwendig eine algebraische Kurve $n$-ter Ordnung.* Dabei ist die stetige Differentiierbarkeit der Kurve vorausgesetzt.

Zum Beweise verwenden wir den nachstehenden Satz über geometrische Verwandtschaften, den S. Kakeya und ich bewiesen haben[3]).

*Wenn das Gleichungssystem*

$$x' = f(x, y), \qquad y' = \varphi(x, y),$$

*wobei $x, y$; $x', y'$ Parallelkoordinaten der entsprechenden Punkte $P, P'$ bedeuten, eine geometrische Punktverwandtschaft definiert, bei welcher eine algebraische Kurve $n$-ter Ordnung in der $x, y$-Ebene der Geraden in der $x', y'$-Ebene entspricht, so müssen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ notwendig algebraische Funktionen sein.* Hierbei ist $(\frac{1}{2}n(n+3)-1)$-malige stetige Differentiierbarkeit der Funktionen $f$, $\varphi$ vorausgesetzt.

2. Man ziehe aus einem Punkte $O$ die veränderliche Gerade $l$, so daß sie die gegebene Kurve in $n$ Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ schneidet, und nehme

---

[1]) Proc. Imp. Acad. Japan **4**, S. 334—336.

[2]) Unter einer ebenen Kurve $n$-ter Ordnung verstehen wir nur solche ebene Kurve $n$-ter Ordnung, daß aus jedem ihrer Punkte Gerade gezogen wird, die die Kurve in $n$ Punkten schneidet.

[3]) Tôhoku Math. Journ. **13**, S. 296—299.

auf der Geraden $l$ den Punkt $P$ derart an, daß

$$\frac{n}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \cdots + \frac{1}{OP_n}.$$

Wenn dabei der Punkt $P$ eine Gerade $g$ beschreibt, so sagen wir, der Punkt $O$ besitze seine Polargerade $g$ in bezug auf die Kurve.

Hilfssatz 1. *Wenn jeder Punkt* (soweit die Konstruktion einen Sinn hat) *eine Polargerade in bezug auf die gegebene Kurve $n$-ter Ordnung besitzt, so ist die Kurve notwendig eine algebraische Kurve $n$-ter Ordnung.*

Beweis. Wenn man dem Punkt $O$ in der Ebene seine Polargerade in bezug auf die Kurve entsprechen läßt, so entsteht eine geometrische Verwandtschaft $\mathfrak{A}$. Setzt man nun zu dieser Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ eine Korrelation zusammen, so entsteht eine Punktverwandtschaft $\mathfrak{B}$. Bei der Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ entspricht jeder Geraden eine algebraische Kurve $(n-1)$-ter Klasse, was durch folgende Betrachtung ersichtlich ist. Bezeichnet man die $n$ Schnittpunkte der Geraden $l$ mit der gegebenen Kurve durch $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dann ist die Polargerade eines auf $l$ liegenden Punktes $O$ in bezug auf die gegebene Kurve mit der des Punktes $O$ in bezug auf die $n$ Tangenten in $P_1, P_2, \ldots, P_n$ identisch. Wenn also der Punkt $O$ sich auf der Geraden $l$ bewegt, so umhüllt die Polargerade des Punktes $O$ in bezug auf die Kurve eine algebraische Kurve $n-1$-ter Klasse.

Also entspricht jeder Geraden bei der Punktverwandtschaft $\mathfrak{B}$ eine algebraische Kurve $(n-1)$-ter Ordnung. Folglich muß die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ und zugleich auch die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ nach dem zuerst erwähnten Satz algebraisch sein.

Die Polargerade eines auf der Kurve liegenden Punktes geht durch diesen Punkt hindurch. Stellt man nun unsere Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ durch

$$u_1 : u_2 : u_3 = f(x, y) : \varphi(x, y) : 1$$

dar, wobei $u_1, u_2, u_3$ laufende Linienkoordinaten bedeuten, dann sind $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ algebraische Funktionen. Daraus ergibt sich, daß die Koordinaten $x, y$ des Punktes unserer Kurve der Relation

$$x f(x, y) + y \varphi(x, y) + 1 = 0$$

genügen. Folglich muß unsere Kurve notwendig eine algebraische Kurve sein.

Nun wollen wir beweisen, daß die Ordnung dieser algebraischen Kurve genau gleich $n$ ist.

Sollte die Ordnung dieser algebraischen Kurve $m > n$ sein, so würde unser Satz für $n$ gewisse Zweige dieser algebraischen Kurve gelten. Wenn diese algebraische Kurve $m$-ter Ordnung nicht zerfällt, kann jeder Zweig in jedem anderen analytisch fortgesetzt werden.

Wenn also ein Punkt $O$ für $n$ Zweige

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

eine Polargerade hat, so muß $O$ als analytische Fortsetzung in bezug auf $s_{n+1}, s', s'', \ldots, s^{(n-1)}$ dieselbe Polargerade besitzen. Die Schnittpunkte der Geraden $l$ mit den Zweigen seien bzw.

$$P_1, \quad P_2, \ldots, P_n;$$
$$P_{n+1}, P', \ldots, P^{(n-1)},$$

und $O$ sei ein beliebiger Punkt auf der Geraden.

Nun muß die $(n-1)$-te Polare des Punktes $O$ in bezug auf die beiden Punktgruppen dieselbe sein, d. h.

$$\frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \cdots + \frac{1}{OP_n} = \frac{1}{OP_{n+1}} + \frac{1}{OP'} + \cdots + \frac{1}{OP^{(n-1)}},$$

welche Lage der Punkt $O$ auf der Geraden annehmen mag.

Daraus ergibt sich, daß die Punktgruppe $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mit der Punktgruppe $P_{n+1}, P, P', \ldots, P^{(n-1)}$ vollkommen übereinstimmt. Dies ist ein Widerspruch zur Tatsache, daß $P_{n+1}$ nicht in der ersten Gruppe enthalten ist. Folglich muß notwendig $m = n$ sein, womit der Hilfssatz 1 vollständig bewiesen ist.

3. Wenn eine ebene Kurve durch eine beliebige Schar von parallelen Geraden in $n$ Punkten geschnitten wird, so daß der Schwerpunkt der $n$ Schnittpunkte eine Gerade beschreibt, so muß jeder Punkt (soweit die Konstruktion einen Sinn hat) in bezug auf die Kurve eine Polargerade besitzen. Dies kann man aus der Liebmannschen Bedingung sowie der Fujiwaraschen Bemerkung ersehen:

Wenn eine Gerade $l$ eine algebraische Kurve $n$-ter Ordnung in $n$ Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ schneidet und die Krümmungsradien in $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bzw. mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ und die Winkel zwischen der Geraden $l$ und den Tangenten in $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mit $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ bezeichnet werden, dann gilt nach Liebmann

$$\frac{1}{\varrho_1 \sin^3 \tau_1} + \frac{1}{\varrho_2 \sin^3 \tau_2} + \cdots + \frac{1}{\varrho_n \sin^3 \tau_n} = 0.$$

M. Fujiwara hat bemerkt: Ist bei einer ebenen Kurve $n$-ter Ordnung (nicht notwendig algebraischen) für beliebige Strahlen eines Strahlenbüschels die obige Liebmannsche Bedingung erfüllt, so besitzt das Zentrum des Büschels die Polargerade in bezug auf die Kurve und umgekehrt.

Wenn ein beliebiger Punkt einer Geraden in bezug auf die Kurve eine Polargerade hat, so muß die Liebmannsche Bedingung für alle Geraden auf der Ebene erfüllt sein. Folglich müssen alle Punkte auf der Ebene in bezug auf die Kurve eine Polargerade besitzen.

Also kann nun der Hilfssatz 1 wie folgt ausgesprochen werden:

Hilfssatz 2. *Wenn jeder Punkt einer Geraden* (soweit die Konstruktion den Sinn hat) *in bezug auf eine ebene Kurve $n$-ter Ordnung eine Polargerade besitzt, so ist die gegebene Kurve notwendig eine algebraische Kurve $n$-ter Ordnung.*

Läßt man nun sich diese Gerade in die unendlich ferne Gerade übergehen, so erhält man den am Anfang erwähnten Satz.

4. Den Spezialfall dieses Satzes für $n = 3$ habe ich unter Verwendung des Graf-Sauerschen Satzes oder des Volkschen Satzes a. a. O. bewiesen. Da ich nun diesen Satz vom ganz anderen Standpunkte aus bewiesen habe, kann man umgekehrt den Graf-Sauerschen Satz aus diesem Satz für $n = 3$ herleiten.

Diese Betrachtungen kann man auch auf Raumkurven und Flächen übertragen.

Den 1. Februar 1929.

(Eingegangen am 25. Februar 1929.)

# Zur Theorie der sphärischen Abbildung im Großen. I.

## Konvexe Flächen mit zwei Nabelpunkten.

Von

Hans Hamburger in Köln*).

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung . . . . . 630

Kapitel I. Voraussetzungen und Problemstellung . . . . . 637

§ 1. Voraussetzungen über das Kurvensystem auf der Kugel . . 637

§ 2. Das Problem der sphärischen Abbildung im Kleinen . . . 641

§ 3. Das Problem im Großen . . . . . 643

Kapitel II. Die Forderung für die Umgebung des zweiten Poles . . . . . 645

§ 4. Die Differentialgleichungen für die Hauptkrümmungsradien . 645

§ 5. Darstellung der Hauptkrümmungsradien durch Greensche Funktionen . . . . . 647

§ 6. Die Greenschen Funktionen in der Umgebung eines Poles . 649

§ 7. Hinreichende und notwendige Bedingungen . . . . . 651

§ 8. Bericht über die Laplacesche Kaskadenmethode . . . . . 652

§ 9. Fortsetzung des Berichtes: Laplacescher Fall; Anwendung der Methode auf andere Differentialgleichungen . . . . . 656

§ 10. Umformung der Bedingung des § 7 . . . . . 662

Kapitel III. Sphärische Abbildung in speziellen Fällen . . 664

§ 11. Sphärische Abbildung im Laplaceschen Fall . . . . . 664

§ 12. Konvexe Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien 668

§ 13. Konvexe Flächen mit zwei Symmetrieebenen . . . . . 672

*) Verfasser hat über Ergebnisse und Methoden der vorliegenden Abhandlung auf der Naturforscherversammlung in Hamburg am 18. September 1928 ausführlich berichtet. Vgl. Jahresber. der D. Math.-V. **38** (1929), S. *1—2*.

Inhaltsverzeichnis (Fortsetzung).

Seite
Kapitel IV. Die Periodizitätsforderung . . . . . 674
§ 14. Ein System von Integro-Differentialgleichungen . . . . . 674
§ 15. Das unendliche System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . . 677
§ 16. Bericht über die Integration eines Systems von unendlich vielen gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung 681
§ 17. Die charakteristische Volterrasche Integralgleichung . . . 684
§ 18. Hauptfall und singulärer Fall; die vollständige Lösung des Problems der sphärischen Abbildung . . . . . 687
§ 19. Entwicklung des Kerns im analytischen Fall . . . . . 695
§ 20. Noch einmal die Laplacesche Kaskadenmethode . . . . . 703

**1.** Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit dem Problem, alle geschlossenen konvexen, stetig gekrümmten Flächen $\mathfrak{F}$ mit zwei Nabelpunkten zu konstruieren, die zu einem vorgegebenen sphärischen Bild ihrer Krümmungslinie gehören. Hierbei wird über die Bildkurven der Krümmungslinien, welche die Einheitskugel einfach und lückenlos überdecken, vorausgesetzt, daß die eine Schar aus geschlossenen Kurven besteht, während jede Kurve der anderen Schar die Bilder der beiden Nabel verbindet. Bezüglich der Umgebung eines Nabelbildes verlangen wir ferner, daß jede Kugeltangente im Nabelbild gleichzeitig Tangente an eine und nur eine im Nabel einmündende Kurve der Schar ist. Das vorgegebene orthogonale Kurvensystem $\mathfrak{S}$ auf der Kugel, welches das sphärische Bild der Krümmungslinien beschreibt, möge somit topologisch von gleichem Typus sein wie das gewöhnliche geographische System der Meridiane und Parallelkreise. Den beiden Polen entsprechen dabei die beiden Nabelbilder, die wir daher auch Pole nennen wollen und mit $N$ und $S$ bezeichnen. Die Differentiierbarkeits- und Regularitätsvoraussetzungen für die Kurven des sphärischen Bildes, insbesondere die genaueren Voraussetzungen über ihr Verhalten in der Umgebung der beiden Pole werden wir in § 1 ausführlich formulieren.

Es gelingt nun, auf analytischem Wege das gestellte Problem in einem gewissen Sinne vollständig zu lösen; das heißt es wird eine Methode angegeben, um zu einem beliebigen orthogonalen Kurvensystem $\mathfrak{S}$, das die Einheitskugel einfach und lückenlos überdeckt und nur zwei Singularitäten (die Nabelbilder oder Pole) des geschilderten Typus hat, alle konvexen Flächen $\mathfrak{F}$ zu konstruieren, die das vorgelegte System $\mathfrak{S}$ zum sphärischen Bild der Krümmungslinien haben (vgl. hierzu auch die Ausführungen in Abschnitt **10** der Einleitung).

**2.** Die Konstruktion nabelpunktfreier Flächenstücke $\mathfrak{F}'$, deren Krümmungslinien singularitätenfreie Stücke von $\mathfrak{S}$ zum sphärischen Bild haben, ist seit langem untersucht worden und führt auf das von Riemann behandelte Randwertproblem der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus in zwei unabhängigen Veränderlichen $\alpha$ und $\beta$. Diese Differentialgleichung soll im folgenden kurz mit (L) bezeichnet werden (vgl. Formel (7) § 2). Um nun vom Problem im Kleinen zum Problem im Großen überzugehen, hat man zunächst durch Grenzübergang das Stück von $\mathfrak{S}$ so zu erweitern, daß der eine der beiden Pole, etwa $S$, am Rande des Stückes liegt (vgl. Abschnitt **17**, § 3).

Obgleich die Koeffizienten von (L) in $S$ und $N$ singulär werden, bereitet der Grenzübergang keine Schwierigkeiten, da sich die Differentialgleichung (L) durch ein mit ihr äquivalentes System von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen läßt, deren Koeffizienten auch noch in den beiden Polen regulär sind. Wir nennen dieses System kurz das System (L*) (vgl. Formel (9), § 2).

**3.** Es läßt sich jetzt $\mathfrak{F}'$ so fortsetzen und zu einer Fläche $\mathfrak{F}$ erweitern, daß das sphärische Bild der Krümmungslinien von $\mathfrak{F}$ das Kurvensystem $\mathfrak{S}$ ganz erfüllt und dem Pole $S$ ein Nabel auf $\mathfrak{F}$ entspricht. Man wird nun aber auf das eigentliche Problem im Großen geführt: Wie müssen die Randwerte zur Konstruktion von $\mathfrak{F}'$ gewählt werden, damit $\mathfrak{F}$ auch wirklich eine geschlossene konvexe Fläche wird? Diese Fragestellung zerfällt bei näherer Betrachtung in zwei Forderungen (vgl. Abschnitt **18**, § 3), nämlich:

I. *Auch dem Pole N von $\mathfrak{S}$ muß ein Nabel auf $\mathfrak{F}$ entsprechen.*

II. *Die zur Konstruktion von $\mathfrak{F}$ brauchbaren Lösungen des Systems $\mathfrak{S}$ müssen in einer der beiden unabhängigen Veränderlichen* (und zwar in $\beta$) *periodisch sein.*

Diese beiden Forderungen sind von völlig verschiedenem Charakter und führen demgemäß auch zu verschiedenen Untersuchungsmethoden. Während die erste Forderung aus dem speziellen topologischen Typus des vorgegebenen Kurvensystems $\mathfrak{S}$ hervorgeht, kommt der zweiten Forderung wesentlich allgemeinere Bedeutung zu, indem sie immer dann auftritt, wenn das auf der Kugel vorgegebene Kurvensystem $\mathfrak{S}$ eine Schar geschlossener singularitätenfreier Kurven enthält. Die zweite Forderung erscheint so als wichtigstes unter den Problemen, die bei der sphärischen Abbildung geschlossener Flächen auftreten.

**4.** Das Kapitel II enthält die Betrachtungen, die auf die Erfüllung der ersten Forderung hinzielen. Indem man versucht, die Fläche $\mathfrak{F}$ durch ihre Hauptkrümmungsradien $R_1$ und $R_2$ zu bestimmen (§ 4), wird man

(in den §§ 5 und 6) zu einer Darstellung von $R_1$ und $R_2$ durch Greensche Funktionen (vgl. ihre Definition in Abschnitt **22**, § 5) geführt, die der bekannten Riemannschen Darstellung eines Integrals der Differentialgleichung (L) durch eine Parametrix entspricht. Aus den Formeln für $R_1$ und $R_2$ (vgl. Formel (42), § 6) ergibt sich, daß $R_1$ und $R_2$ eindeutig bestimmt sind, wenn die Werte von $R_1$ längs einer einzigen die Pole $S$ und $N$ verbindenden Kurve $\mathfrak{C}$ des Systems $\mathfrak{S}$ vorgegeben sind.

In § 7 erhält man schließlich die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die Forderung I erfüllt ist. Diese Bedingung ist von der Form (vgl. Formel (50), § 7)

$$(*) \qquad \int_0^{\pi} K(\alpha, \beta) \frac{dR_1(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = 0 \qquad \text{(identisch in } \beta\text{).}^1)$$

Hierin bezeichnen $R_1(\alpha)$ die Werte, die $R_1$ auf $\mathfrak{C}$ annimmt, während $K(\alpha, \beta)$ eine Funktion zweier Veränderlichen bedeutet, die mit einer der Greenschen Funktionen zusammenhängt.

**5.** Die Bedingung (*) läßt sich für den Fall, daß das vorgegebene Kurvensystem $\mathfrak{S}$ analytisch ist, in charakteristischer Weise umformen. Um zu der neuen Form der Bedingung (*) zu gelangen, verwendet man eine Methode zur Integration der Differentialgleichung (L), die aus einer Erweiterung der Laplaceschen Kaskadenmethode[2]) entstanden ist. Obgleich die alte Laplacesche Methode nur in gewissen speziellen Fällen zum Ziele führt, die wir kurz „*Laplacesche Fälle*“ nennen wollen, läßt sich doch durch einen neuartigen Ansatz diese Methode so modifizieren, daß durch sie die Integration der Differentialgleichung (L) immer dann gelingt, wenn ihre Koeffizienten analytisch sind. Die neue Methode läßt sich übrigens auch zur Integration anderer Typen von Differentialgleichungen verwenden, z. B. zur Integration des Systems (L*). Sie wird in einer anderen selbständigen Abhandlung im Zusammenhang ausführlich dargestellt werden. In den §§ 8 und 9 beschränken wir uns darauf, die Grundgedanken und wichtigsten Ergebnisse zusammenzustellen, soweit wir uns auf sie in den folgenden Untersuchungen stützen.

Vermittels der modifizierten Kaskadenmethode läßt sich die Bedingung (*) durch eine unendliche Reihe von Bedingungen ersetzen, die

---

[1]) Daß unter den Voraussetzungen, die über das Kurvensystem $\mathfrak{S}$ gemacht sind, der Krümmungsradius $R_1$ notwendig einmal stetig differentiierbar ist, wird in Abschnitt **14**, § 1 bewiesen.

[2]) Eine ausführliche Darstellung der alten Laplaceschen Kaskadenmethode und ihrer geometrischen Bedeutung, endlich die geometrische Charakterisierung der „*Laplaceschen Fälle*“ s. Darboux, Théorie générale des surfaces 2, Kap. II, 2. Aufl., S. 23—53; vgl. auch Fußnote [11]), § 9.

von $\beta$ unabhängig sind; und zwar wird man auf eine unendliche Folge von Funktionen $\zeta_\mu(\alpha)$ $(0 \leqq \mu < \infty)$ geführt (vgl. Formel (80), § 10), derart, daß die Bedingung (*) nunmehr die Form

$$(**) \qquad \int_0^\pi \zeta_\mu(\alpha) \frac{dR_1(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \ldots \to \infty)$$

annimmt.

Die Bedeutung des „Laplaceschen Falles" für unser Problem erhellt aus dem Satze, daß *die Bedingungen* (**) *im „Laplaceschen Falle" und nur im „Laplaceschen Falle" sich auf endlich viele Bedingungen reduzieren, indem dann nur endliche viele der Funktionen* $\zeta_\mu(\alpha)$ *voneinander linear unabhängig sind.*

6. In Kapitel III wird das gestellte Problem der sphärischen Abbildung in einigen speziellen Fällen, in welchen die Forderung II (die Periodizitätsforderung) von selbst erfüllt ist, vollständig gelöst; und zwar wird zunächst (§ 11) die Untersuchung im „Laplaceschen Fall" durchgeführt, dem auch die konvexen Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien (§ 12) als einfachste Flächen vom Laplaceschen Typus zuzurechnen sind[3]). Ein von den Laplaceschen Fällen verschiedenes, leicht zu behandelndes Beispiel liefern schließlich die konvexen Flächen mit zwei Symmetrieebenen (§ 13).

7. Die Ergebnisse des Kapitel III, die sich zunächst nur auf spezielle Fälle unseres Problems beziehen, führen auf eine für die sphärische Abbildung im Großen fundamentale Einteilung der Probleme in zwei Typen, und zwar sagen wir, ein Problem sei vom Haupttypus, wenn wie in den speziellen Fällen des Kapitel III die Integrale des Systems (L*) bei beliebig vorgegebenen Randwerten von $R_1$ auf $\mathfrak{C}$ von selbst in $\beta$ periodisch sind; führt aber die Periodizitätsforderung zu einer Bedingung für die Randwerte auf $\mathfrak{C}$, so haben wir ein Problem vom singulären Typus vor uns. Somit erheben sich von selbst die beiden wichtigen Fragestellungen:

1. *Welches sind die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, daß ein Problem vom Haupttypus ist?*

2. *Welches ist bei einem Problem vom singulären Typus die Bedingung für die Randwerte, damit die Periodizitätsforderung erfüllt ist?*

Bei der Untersuchung der Forderung II, die in Kapitel IV durchgeführt wird, gelangt man schließlich (in § 17) zu einer hinreichenden und notwendigen Bedingung für die Periodizität in der Form einer homogenen

[3]) Daß die Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien die einfachsten Beispiele von Flächen des Laplaceschen Typus liefern, ist schon seit langem bekannt. Vgl. Darboux, loc. cit. Fußnote [2]), **4**, S. 198–203.

linearen Integralgleichung erster Art vom Volterraschen Typus

$$(\dagger) \qquad \int_0^{\alpha} V(\alpha, \sigma)\, \xi_0(\sigma)\, d\sigma = 0.^{4})$$

Hierbei ist der Kern $V(\alpha, \sigma)$ aus den vorgegebenen Größen des Problems in eindeutiger Weise konstruierbar, $\xi_0(\sigma)$ bedeutet eine Funktion, die an die Stelle der Randwerte auf $\mathfrak{C}$ tritt und die ebenso wie die Randwerte die Lösung des Systems $(L^*)$ eindeutig festlegt.

Durch die Bedingung $(\dagger)$ ist aber nicht nur die Frage 2, sondern auch die Frage 1 beantwortet. *Das Problem ist nämlich dann und nur dann vom Haupttypus, wenn* $V(\alpha, \sigma) \equiv 0$ *ist*[4a]).

8. Die Methode, durch die man zur Bedingung $(\dagger)$ gelangt, benutzt wesentlich die Fourierentwicklungen der periodischen Funktionen. Da aber die Lösungen des Systems $(L^*)$ im allgemeinen nicht periodisch sind, so geht man anstatt von $(L^*)$ von einem System von Integrodifferentialgleichungen $(\Lambda^*)$ (vgl. Formel (106), § 14) aus, das sich von $(L^*)$ nur durch ein Zusatzglied unterscheidet[5]). Die Integrale des Systems $(\Lambda^*)$ sind nunmehr immer von selbst periodisch in $\beta$, wenn sie nur für einen einzigen Wert von $\alpha$ periodisch sind. Außerdem ist ein Integral von $(\Lambda^*)$ gleichzeitig Integral von $(L^*)$, wenn noch eine einfache Nebenbedingung (die Nebenbedingung (113), § 14) erfüllt ist. Es zeigt sich schließlich, daß *die Gesamtheit der periodischen Lösungen von* $(L^*)$ *mit der Gesamtheit derjenigen periodischen Lösungsn von* $(\Lambda^*)$ *übereinstimmt, welche der Nebenbedingung genügen.*

---

[4]) Über die Methoden zur Lösung dieser Integralgleichung vgl. Fußnote [26]), § 18.

[4a]) **Zusatz bei der Korrektur** (17. 11. 29). Über ein weiteres tiefer liegendes Kriterium hat Verf. inzwischen im Mathematischen Dozentenkolloquium der Berliner Universität am 31. 10. 29 vorgetragen. Dieses Kriterium, das in einer zweiten Abhandlung später veröffentlicht werden soll, lautet:

*Für den Haupttypus ist hinreichend und notwendig, daß man das Kurvensystem* $\mathfrak{S}$ *auf der Kugel durch passende Wahl von endlich vielen Zahlen* $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = \pi$ *in endlich viele Zonen*

$$0 = \alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1; \quad \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2; \quad \ldots; \quad \alpha_{k-1} \leqq \alpha \leqq \alpha_k = \pi$$

*einteilen kann, von denen jede sich durch „Laplacesche Fälle" gleichmäßig approximieren läßt.*

Da nach Darboux (vgl. Fußnote [2])) der „Laplacesche Fall" durch rein geometrische Eigenschaften von $\mathfrak{S}$ definiert werden kann, so liefert der angegebene Satz ein geometrisches Kriterium für den Haupttypus, während die in dem vorliegenden Text abgeleiteten hinreichenden und notwendigen Bedingungen sämtlich analytischer Natur sind.

[5]) In der Fußnote [19]) des § 15 wird gezeigt, wie man notwendig von den Fourierentwicklungen auf das System $(\Lambda^*)$ geführt wird, dessen Einführung zunächst im § 14 als Kunstgriff erscheint.

Entwickelt man nunmehr die periodischen Lösungen von $(\Lambda^*)$ in Fourierreihen, so ergibt sich (§ 15), daß die Fourierkoeffizienten, die noch von $\alpha$ abhängen, einem unendlichen System gewöhnlicher linearer inhomogener Differentialgleichungen erster Ordnung (D) genügen (vgl. Formel (122), § 15). Ein solches unendliches lineares System läßt sich nun aber ebenso wie ein endliches lineares System von Differentialgleichungen behandeln, wenn nur die Matrix des Systems im Hilbertschen Sinne beschränkt ist (genauer gleichmäßig beschränkt; vgl. die Definition in Abschnitt **56**, § 16). Die wichtigsten für das System (D) geltenden Sätze, soweit sie für das folgende von Bedeutung sind, werden in § 16 ohne Beweis [6]) aufgezählt. Da die Matrix des linearen Systems (D) beschränkt ist, so lassen sich die Fourierkoeffizienten der Lösung von $(\Lambda^*)$ aus dem System (D) bestimmen, und zwar erscheinen alle Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit von einem einzigen unter ihnen, nämlich von $\xi_0(\alpha)$, der willkürlich bleibt (vgl. Formel (136), § 17). Indem man $\xi_0(\alpha)$ so zu bestimmen sucht, daß auch die Nebenbedingung erfüllt ist, wird man auf die Volterrasche Integralgleichung (†) geführt (vgl. Formel (142) und (143), § 17).

**9.** Um zu erkennen, ob ein Problem vom Haupttypus ist, kommt somit alles auf die Konstruktion des Kerns $V(\alpha, \sigma)$ an. Diese Konstruktion erscheint aber zunächst noch unübersichtlich, da der Kern $V(\alpha, \sigma)$ in der Gestalt, in welcher er in § 17 erscheint, entweder von einem Fundamentalsystem von Integralen des zu (D) gehörigen homogenen Systems von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen, oder aber von einer Lösung des Systems $(\Lambda^*)$ abhängt (vgl. Formel (144), § 17). Glücklicherweise gelingt es aber, in § 19 unter der Voraussetzung, daß das vorgegebene Kurvensystem $\mathfrak{S}$ analytisch ist, den Kern $V(\alpha, \sigma)$ in Potenzreihen zu entwickeln, deren Koeffizienten sich durch einfache Rekursionen aus den vorgegebenen Größen des Problems bestimmen lassen. Aus dieser neuen Darstellung für $V(\alpha, \sigma)$ kann auch gleichzeitig eine neue explizite Antwort auf die Frage abgelesen werden, ob ein Problem zum Haupttypus gehört, und so wird man zu dem, wie uns scheint, wichtigsten Ergebnis der vorliegenden Untersuchungen geführt: *Es seien* $a(\alpha, \beta)$, $b(\alpha, \beta)$ *die Koeffizienten des Systems von Differentialgleichungen* $(\mathrm{L}^*)$, *welche in einfacher Weise mit dem zum vorgegebenen Kurvensystem* $\mathfrak{S}$ *gehörigen Größen zusammenhängen, und zwar seien* $a(\alpha, \beta)$ *und* $b(\alpha, \beta)$ *analytische, in* $\beta$ *periodische Funktionen. Man bilde die Fourierreihen*

---

[6]) Eine ausführliche Darstellung der nicht schwer zu findenden Beweise, die sich auf die Hauptsätze der Toeplitz-Hellingerschen Theorie von den unendlichen, beschränkten Matrizen stützen, bleibe einer besonderen Note vorbehalten. Vgl. außerdem Fußnote [20]), § 16.

$$a(\alpha,\beta)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}a_\nu(\alpha)\,e^{\nu i\beta},$$

$$b(\alpha,\beta)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}b_\nu(\alpha)\,e^{\nu i\beta}$$

*und leite nunmehr aus den Fourierkoeffizienten* $b_\nu(\alpha)$ *durch einfache Differentiationen und Summationen nach einem Rekursionsverfahren* (vgl. Formel (164), § 19) *neue Funktionen ab:*

$$B_{0\nu}(\alpha)=b_\nu(\alpha),\ B_{1\nu}(\alpha),\ \ldots,\ B_{\varrho\nu}(\alpha),\ \ldots \qquad (0\leqq\varrho<\infty).$$

*Dann ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für den Haupttypus: Es müssen die Beziehungen*

$$(\dagger\dagger) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}a_{-\nu}(\alpha)\,B_{\varrho\nu}(\alpha)=0$$

*identisch in* $\alpha$ *für alle* $\varrho$ *erfüllt sein.*

Da der „Laplacesche Typus" offenbar ein Spezialfall des Haupttypus ist, so erhebt sich die Frage, ob nicht auch für den Laplaceschen Typus ein Kriterium existiert, das von den $B_{\varrho\nu}$ allein abhängt. Als Antwort auf diese Frage findet man in § 20 den Satz:

*Das gestellte Problem ist dann und nur dann vom „Laplaceschen Typus", wenn erstens alle Bedingungen* (††) *erfüllt sind, und wenn zweitens, unter* $n$ *eine feste endliche Zahl verstanden, zu jedem* $\varrho\geqq n+1$ *sich* $n+1$ *Funktionen* $\chi_{\varrho\varkappa}(\alpha)$ $(0\leqq\varkappa\leqq n)$ *bestimmen lassen, derart, daß für alle* $\varrho\geqq n+1$

$$B_{\varrho\nu}(\alpha)=\sum_{\varkappa=0}^{n}\chi_{\varrho\varkappa}(\alpha)\,B_{\varkappa\nu}(\alpha) \qquad (-\infty<\nu<+\infty)$$

*ist, d. h. kurz, wenn die unendliche Matrix* $(B_{\varrho\nu})$ *nur von endlichem Range ist.*

**10.** Bevor wir in den §§ 19 und 20 die Untersuchung des analytischen Falles in Angriff nehmen, zeigen wir in § 18, wie die Lösung des Problems der sphärischen Abbildung beim Haupttypus und beim singulären Typus vollständig durchzuführen ist. Da beim Haupttypus die Periodizitätsforderung von selbst erfüllt ist, genügt es, um auch die Forderung I zu befriedigen, die Randwerte von $R_1$ auf $\mathfrak{C}$ so zu bestimmen, daß sie der Bedingung (*) bzw. im analytischen Falle den mit (*) äquivalenten Bedingungen (**) genügen. Durch die Randwerte von $R_1$ auf $\mathfrak{C}$ läßt sich dann die Fläche $\mathfrak{F}$ in einfacher Weise darstellen.

Beim singulären Typus wird man hingegen zunächst die Forderung II zu erfüllen suchen, d. h. man wird nach einer vollständigen Lösung der Volterraschen Integralgleichung (†) fragen, um erst nachträglich auch noch der Forderung I zu genügen.

Die bisher bekannten geschlossenen konvexen Flächen $\mathfrak{F}$ mit zwei Nabelpunkten sind sämtlich vom Haupttypus (vgl. die speziellen Fälle in Kapitel III). Der Nachweis, daß auch konvexe Flächen mit zwei Nabelpunkten vom singulären Typus existieren, wird in einem später zu veröffentlichenden zweiten Teil dieser Arbeit geführt werden (vgl. die Fußnote [30]), § 18).

## Kapitel I.

## Voraussetzungen und Problemstellung.

### § 1.

### Die Voraussetzungen über das Kurvensystem auf der Kugel.

**11.** Auf der Einheitskugel sei ein orthogonales Kurvensystem $\mathfrak{S}$ vorgelegt. Um zu einer analytischen Darstellung dieses Systems zu gelangen, denke man sich einen Einheitsvektor $\mathfrak{u}$ mit den drei Komponenten $u$, $v$, $w$ als Funktion zweier Parameter $\alpha$, $\beta$ gegeben; diese Funktionen mögen *stetige partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung* haben. Für $\alpha =$ konst. bzw. $\beta =$ konst. erhält man dann die beiden sich schneidenden Kurvenscharen von $\mathfrak{S}$. Bezeichnen die Indizes $\alpha$ und $\beta$ in üblicher Weise partielle Differentialquotienten nach $\alpha$ und $\beta$, also

$$\mathfrak{u}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \alpha}, \quad \mathfrak{u}_\beta = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \beta},$$

so lautet die Orthogonalitätsbedingung

$$\mathfrak{u}_\alpha \mathfrak{u}_\beta = 0 .$$

Es werde ferner das Bogenelement auf der Kugel

$$ds^2 = d\mathfrak{u}^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 \qquad (A \geqq 0,\ B \geqq 0)$$

gesetzt; außerdem sei

$$\mathfrak{u} = -\frac{\mathfrak{u}_\alpha \wedge \mathfrak{u}_\beta}{AB},$$

d. h. $\mathfrak{u}$ erstrecke sich in die negative Normalenrichtung; somit zeigt die positive Normalenrichtung im weiteren Verlauf unserer Betrachtungen immer in das Innere der geschlossenen Fläche.

**12.** Nunmehr werde weiter vorausgesetzt, daß das Kurvensystem $\mathfrak{S}$ die Kugel einfach und lückenlos überdeckt und nur zwei Singularitäten enthält. Diese Singularitäten, die wir kurz Pole nennen wollen, mögen in den Punkten $S$ und $N$ der Kugeloberfläche liegen. Die Kurven $\alpha =$ konst. seien sämtlich geschlossene Kurven, daraus folgt

$$\mathfrak{u}(\alpha, \beta + 2\pi) = \mathfrak{u}(\alpha, \beta).$$

Die Kurven $\beta = \text{konst.}$, auch Meridiane genannt, erstrecken sich sämtlich vom $S$ nach $N$. Sind $\mathfrak{u}_S$ bzw. $\mathfrak{u}_N$ die beiden Vektoren, die sich, vom Mittelpunkt der Kugel, nach den beiden Polen $S$ und $N$ erstrecken, so sei

$$\mathfrak{u}(0, \beta) = \mathfrak{u}_S, \quad \mathfrak{u}(\pi, \beta) = \mathfrak{u}_N.$$

Da nach den gemachten Voraussetzungen die geschlossenen Kurven $\alpha = \text{konst.}$ des Systems sich auf die Punkte $S$ bzw. $N$ zusammenziehen, wenn $\alpha$ gegen 0 bzw. $\pi$ strebt, so ist

$$B(0, \beta) = 0, \quad B(\pi, \beta) = 0. \tag{1}$$

Solange aber $\alpha$ von 0 und $\pi$ verschieden ist, seien die Parameter $\alpha, \beta$ so gewählt, daß beständig

$$A(\alpha, \beta) > 0, \quad B(\alpha, \beta) > 0 \qquad (0 < \alpha < \pi).$$

**13.** Schließlich machen wir noch eine Reihe von Voraussetzungen über das Verhalten der Kurven von $\mathfrak{S}$ in der Umgebung der beiden Pole:

**1.** *Die Funktionen $u, v, w$ mögen auch in den Polen, d. h. auch für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ stetige partielle Ableitung nach $\alpha$ und $\beta$ bis zur dritten Ordnung haben.*

**2.** *Zerlegt man die beiden Einheitsvektoren $\frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A}$, $\frac{\mathfrak{u}_\beta}{B}$ nach Komponenten in drei zueinander senkrechte Richtungen, von denen die beiden ersten in der Tangentialebene an die Kugel in $S$ liegen, die dritte in die Richtung der Kugelnormalen in $S$ fällt, so mögen in der Umgebung von $S$ diese Komponenten sich in der Form*

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A} &= (\cos\vartheta + \alpha\omega_{11}, \quad \sin\vartheta + \alpha\omega_{12}, \quad \alpha\omega_{13}) \\ \frac{\mathfrak{u}_\beta}{B} &= (-\sin\vartheta + \alpha\omega_{21}, \quad \cos\vartheta + \alpha\omega_{22}, \quad \alpha\omega_{23}) \end{aligned} \tag{2}$$

*darstellen lassen.* Hierbei bezeichnen die sechs Größen $\omega_{ik}$ Funktionen von $\alpha$ und $\beta$ mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung; $\vartheta$ bezeichne eine Funktion von $\beta$ allein und sei auch zweimal stetig differentiierbar; ferner sei ständig $\frac{d\vartheta}{d\beta} > 0$ und endlich genüge $\vartheta$ der Funktionalgleichung

$$\vartheta(\beta + 2\pi) = 2\pi + \vartheta(\beta).$$

In der Umgebung des Pols $N$ gelte das gleiche für eine entsprechende Zerlegung der beiden Einheitsvektoren $\frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A}$, $\frac{\mathfrak{u}_\beta}{B}$ in Komponenten [7]).

[7]) Um sich von dem Charakter der Voraussetzung (2) über die Kurven von $\mathfrak{S}$ in der Umgebung der Pole ein Bild zu machen, bemerke man, daß das sphärische Bild von $\mathfrak{F}$ diesen Voraussetzungen dann und nur dann genügt, wenn die Fläche $\mathfrak{F}$

(Fortsetzung der Fußnote [7]) auf nächster Seite.)

Aus der Voraussetzung 2. folgt unmittelbar, daß, wie in der Einleitung gefordert wurde, jede Kugeltangente in $S$ (bzw. $N$) Tangente einer und nur einer in $S$ (bzw. $N$) einmündenden Meridiankurve ist. Ferner schließt

---

sich in der Umgebung des Nabelpunktes in der Form

$$(\cdot) \qquad z = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}\right) + \varrho^m (k + \Phi(\varrho, \vartheta))$$

darstellen läßt. Hierbei ist der Nabel zum Koordinatenanfangspunkte $O$, die Tangentialebene an die Fläche $\mathfrak{F}$ im Nabel zur Koordinatenebene gewählt; $\varrho$, $\vartheta$ bedeuten wie üblich Polarkoordinaten in der Koordinatenebene, $z$ den Abstand des Flächenpunktes von der Koordinatenebene. Außerdem bezeichnen $R$, $m$ und $k$ Konstante, wobei $R > 0$, $m > 2$, $k$ beliebig, aber $\neq 0$ ist, $\Phi(\varrho, \vartheta)$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung, welche noch der Beziehung

$$(\cdot\cdot) \qquad \lim_{\varrho \to 0} \Phi(\varrho, \vartheta) \to 0$$

genügt. Endlich ist

$$(\cdot\,\cdot) \qquad z = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}\right)$$

die Gleichung der Schmiegungskugel an $\mathfrak{F}$ im Nabel, $R$ ihr Radius.

Um diese Behauptung zu beweisen, gehe man von der Darstellung einer allgemeinen Fläche, welche die Kugel $(\cdot\,\cdot)$ zur Schmiegungskugel hat, in der Umgebung des Nabelpunktes

$$(*) \qquad z = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}\right) + \varrho^m F(\varrho, \vartheta)$$

aus. Hierbei bezeichne wieder $m$ eine positive Zahl $> 2$, $F(\varrho, \vartheta)$ eine dreimal stetig differentiierbare Funktion.

Nunmehr ist die Gleichung

$$F(\varrho, \vartheta) = k + \Phi(\varrho, \vartheta),$$

wo $\Phi(\varrho, \vartheta)$ der Relation $(\cdot\cdot)$ genügt, notwendig und hinreichend dafür, daß die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Fläche $(*)$ bezogen auf die Parameter $\varrho$ und $\vartheta$ auch noch für $\varrho = 0$ regulär ist. Dies folgert man aus der Poincaré-Bendixsonschen Theorie der Singularitäten von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung (vgl. etwa I. Bendixson: Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. **24** (1901), S. 1–88). Die Tatsache, daß die Differentialgleichung der Krümmungslinien für $\varrho = 0$ regulär ist, ist aber mit den Voraussetzungen (2) des Textes über das sphärische Bild der Krümmungslinien in der Umgebung des Nabelpunktes, wie einige Überlegung zeigt, identisch.

Die Darstellung $(\cdot)$ der Fläche $\mathfrak{F}$ besagt geometrisch, daß zu ihr eine Rotationsfläche

$$z = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}\right) + k\varrho^m$$

gehört, die $\mathfrak{F}$ im Nabel von höherer Ordnung berührt, als die Schmiegungskugel $(\cdot\,\cdot)$. Daher verhalten sich auch die Krümmungslinien von $\mathfrak{F}$ in der Umgebung von $O$, wie die Krümmungslinien auf einer Rotationsfläche in der Umgebung ihres Nabels.

man aus (2) nach leichter Rechnung

$$(3)\qquad \boxed{\begin{aligned}\frac{B_\alpha}{A} &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A}\right)\cdot\frac{\mathfrak{u}_\beta}{B} = \frac{d\vartheta}{d\beta} + \alpha\,\Omega_1,\\ \frac{A_\beta}{B} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\mathfrak{u}_\beta}{B}\right)\cdot\frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A} = \psi(\beta) + \alpha\,\Omega_2,\end{aligned}}$$

wo $\Omega_1$ und $\Omega_2$ Funktionen der Veränderlichen $\alpha$ und $\beta$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung, $\psi$ eine einmal stetig differentiierbare Funktion von $\beta$ allein bedeutet. Weiter ergibt sich aus (2) in Verbindung mit (3)

$$(4)\qquad A(\alpha,\beta) = c + \alpha A_1(\alpha,\beta),$$

$$(5)\qquad B(\alpha,\beta) = \alpha\left(c\frac{d\vartheta}{d\beta} + \alpha B_1(\alpha,\beta)\right),$$

unter $c$ eine Konstante $\neq 0$ und unter $A_1$ und $B_1$ Funktionen von $\alpha$ und $\beta$ verstanden, die stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen.

In der Umgebung von $N$ gelten entsprechende Darstellungen, die man aus (2), (3), (4) und (5) erhält, indem man $\alpha$ durch $\pi - \alpha$ ersetzt. Aus (4) folgt nunmehr, daß $A(\alpha,\beta) > 0$ im ganzen abgeschlossenen Bereich $0 \leqq \alpha \leqq \pi$, $0 \leqq \beta \leqq 2\pi$ gilt. So viel über das vorgegebene Kurvensystem $\mathfrak{S}$ auf der Kugel.

**14.** Indem wir eine Fläche $\mathfrak{F}$ durch den Vektor $\mathfrak{x}$ darstellen, der sich vom Koordinatenanfangspunkt zum Flächenpunkt erstreckt, suchen wir alle zweimal stetig differentiierbaren geschlossenen konvexen Flächen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha,\beta)$ zu konstruieren, deren Parameterlinien $\alpha = \text{konst.}$, $\beta = \text{konst.}$ die Krümmungslinien sind, und deren ins Innere gerichteter Normaleinheitsvektor $\mathfrak{N} = -\mathfrak{u}$ ist. Nach dem Dupinschen Satze müssen sich dann zwei positive Funktionen $R_1(\alpha,\beta)$ und $R_2(\alpha,\beta)$, die beiden Krümmungsradien der Fläche $\mathfrak{x}$, finden lassen, derart, daß

$$(6)\qquad \boxed{\mathfrak{x}_\alpha = R_1\,\mathfrak{u}_\alpha,\quad \mathfrak{x}_\beta = R_2\,\mathfrak{u}_\beta}$$

ist.

Aus (6) folgt nach Multiplikation mit $\mathfrak{u}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{u}_\beta$

$$R_1 = \frac{\mathfrak{x}_\alpha\,\mathfrak{u}_\alpha}{A^2},\qquad R_2 = \frac{\mathfrak{x}_\beta\,\mathfrak{u}_\beta}{B^2}.$$

Da diese Ausdrücke für $R_1$ bzw. $R_2$ beide mit $\mathfrak{x}_\alpha$ und $\mathfrak{u}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{x}_\beta$ und $\mathfrak{u}_\beta$ einmal nach $\alpha$ und $\beta$ stetig diffenentiierbar sind, so schließt man, daß unter den gemachten Voraussetzungen über $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{x}$ die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von $R_1$ und $R_2$ nach $\alpha$ und $\beta$ notwendig existieren und stetig sind.

In den Punkten $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ von $\mathfrak{F}$, die den Polen $S$ und $N$ auf der Kugel entsprechen, soll die Fläche $\mathfrak{F}$ je einen Nabel haben, d. h.

$$R_1(0, \beta) = R_2(0, \beta) = R_0, \qquad R_1(\pi, \beta) = R_2(\pi, \beta) = R_\pi.$$

Der Fall, daß einer der Nabelpunkte oder beide in sogenannte Flachpunkte ausarten, d. h. daß $R_0 = \infty$ oder $R_\pi = \infty$ wird, soll im folgenden von der Untersuchung ausgeschlossen werden.

Wenn die konstruierte Fläche $\mathfrak{F}$ auch noch Nabel in Punkten hat, die von $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ verschieden sind, so sei etwa im Punkte $\alpha_1, \beta_1$

$$R_1(\alpha_1, \beta_1) - R_2(\alpha_1, \beta_1) = 0.$$

Diese Nabel nennen wir außerwesentlich, da sie keine Singularität in der topologischen Struktur der Krümmungslinien hervorrufen, während wir die Nabel von $\mathfrak{F}$ in den Punkten $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$, in denen das Netz der Krümmungslinien topologische Singularitäten hat, als wesentlich bezeichnen. Flächen, die einige solcher außerwesentliche Nabel haben, sollen im folgenden auch noch als Lösungen des gestellten Problems zugelassen werden, wenn nur die Anzahl ihrer wesentlichen Nabel zwei ist. In den vorliegenden Untersuchungen ist somit immer unter einem Nabel ein wesentlicher Nabel zu verstehen.

Eine Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$, die den Beziehungen (6) genügt und zwei wesentliche Nabel hat, wollen wir im folgenden kurz eine Bildfläche des vorgelegten Kurvensystems $\mathfrak{S}$ auf der Kugel nennen.

## § 2.

## Das Problem der sphärischen Abbildung im Kleinen.

**15.** Wir fassen zunächst kurz die bereits bekannten Ergebnisse zusammen, die zu einer Lösung des Problems der sphärischen Abbildung im Kleinen führen, d. h. etwa im Bereich

$$\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1, \qquad \beta_0 \leqq \beta \leqq \beta_1,$$

wobei

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \pi, \qquad \beta_1 - \beta_0 < 2\pi$$

ist.

Es sei $\zeta$ ein beliebiges Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(7) \quad (\mathrm{L}) \qquad \boxed{L(\zeta) \equiv \zeta_{\alpha\beta} - \frac{A_\beta}{A}\zeta_\alpha - \frac{B_\alpha}{B}\zeta_\beta = 0.}$$

Ferner setze man

$$(8) \qquad \xi = \frac{\zeta_\alpha}{A}, \quad \eta = \frac{\zeta_\beta}{B}.$$

Dann läßt sich leicht verifizieren, daß erstens $\xi$ und $\eta$ dem System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(9)\quad (\mathrm{L}^*)\qquad \boxed{\begin{aligned}\xi_\beta &= \frac{B_\alpha}{A}\,\eta,\\ \eta_\alpha &= \frac{A_\beta}{B}\,\xi\end{aligned}}$$

genügen, wenn $\zeta$ ein Integral von (L) ist. Ist zweitens umgekehrt das Funktionenpaar $\xi, \eta$ eine Lösung des Systems $(\mathrm{L}^*)$, so ist

$$(10)\qquad \zeta = \int \xi A\, d\alpha + \eta B\, d\beta$$

ein vom Wege unabhängiges Integral und liefert eine Lösung von (L).

Es ist nun bekannt, daß der Vektor

$$(11)\qquad \boxed{\mathfrak{x} = \xi \frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A} + \eta \frac{\mathfrak{u}_\beta}{B} + \zeta \mathfrak{u}}$$

eine Bildfläche $\mathfrak{F}$ des Kurvensystems $\mathfrak{S}$ liefert[8]), und umgekehrt kann jede Bildfläche $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{S}$ in der Form (11) dargestellt werden, wo $\zeta$ ein Integral der Differentialgleichung (L) ist und $\xi$ und $\eta$ sich aus den Formeln (8) ergeben.

Bezeichnen $X, Y, Z$ laufende Koordneten, so liefert die Ebenengleichung

$$u X + v Y + w Z = \zeta$$

die Tangentialebene an die Fläche $\mathfrak{F}$ im Punkte $\mathfrak{x}$; d. h.

$$u : v : w : -\zeta$$

sind die tangentiellen Koordinaten der Fläche $\mathfrak{F}$.

$$\zeta = \text{konst.}$$

ist eine triviale Lösung von (L); sie liefert als Bildfläche $\mathfrak{F}$ eine Kugel mit dem Nullunkt als Mittelpunkt.

Andere triviale Lösungen von (L) sind

$$\zeta = a u + b v + c w = \mathfrak{a}\,\mathfrak{u},$$

wo $\mathfrak{a} = (a, b, c)$ einen von $\alpha$ und $\beta$ unabhängigen Vektor bezeichnet. In diesem Fall entartet $\mathfrak{F}$ zu einem Punkt, und zwar ergibt sich aus (11)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}.$$

[8]) Vgl. etwa Darboux, loc. cit. Fußnote [2]), **1**, 2. Aufl., S. 292—294.

**16.** Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist ein Integral $\zeta$ von (L) durch seine Werte für $\alpha = \alpha_0$ und $\beta = \beta_0$ eindeutig bestimmt. Die Randwerte von $\zeta$ für $\alpha = \alpha_0$ und $\beta = \beta_0$ liefern aber in Verbindung mit den Gleichungen (8) und (9) auch die Randwerte von $\xi$ und $\eta$ und bestimmen somit wegen (11) die Bilder der beiden Kurvenstücke $\alpha = \alpha_0$ und $\beta = \beta_0$ von $\mathfrak{S}$.

Man kann andererseits auch umgekehrt von den Bildern der Randkurven ausgehen und diese beliebig wählen, wenn man nur berücksichtigt, daß die Bildkurven mit den vorgegebenen Kurven von $\mathfrak{S}$ nach Formel (6) in entsprechenden Punkten parallele Tangenten haben. Erfüllen die Bildkurven diese Bedingung, so stehen, wie eine leichte Rechnung zeigt, die drei Funktionen

$$\zeta = \mathfrak{x}\mathfrak{u}, \qquad \xi = \mathfrak{x}\frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A}, \qquad \eta = \mathfrak{x}\frac{\mathfrak{u}_\beta}{B}$$

in der Tat in den durch die Gleichungen (8) und (9) angegebenen Beziehungen.

## § 3.

## Das Problem im Großen.

**17.** Geht man zur Grenze $\alpha_0 \to 0$ über, so zieht sich die sphärische Kurve $\alpha = \alpha_0$ auf den Pol $S$ zusammen. Wir denken uns nun den Pol $S$ in den Punkt mit den Koordinaten $0, 0, -1$ gelegt und verlangen, daß der Bildpunkt von $S$ der Fläche $\mathfrak{F}$ mit $S$ zusammenfällt. Durch eine Parallelverschiebung von $\mathfrak{F}$ läßt sich diese Bedingung immer erfüllen. Diese Forderung liefert wegen (11) für die Randwerte von $\xi, \eta$ die Bedingungen

$$\xi(0, \beta) = 0, \qquad \eta(0, \beta) = 0, \qquad \zeta(0, \beta) = 1. \tag{12}$$

Aus (1) folgt nun aber, daß der Koeffizient $\frac{B_\alpha}{B}$ der Differentialgleichung (L) für $\alpha \to 0$ über alle Grenzen wächst und mithin diese Differentialgleichung für $\alpha = 0$ nicht mehr regulär ist. Andererseits ist aber wegen (3) das System von Differentialgleichungen (L*) für $\xi$ und $\eta$ auch noch für $\alpha = 0$ regulär.

Man beweist leicht nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen, daß eine Lösung $\xi, \eta$ von (L*) durch die Randwerte

$$\eta = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, \qquad \xi = \xi(\alpha, \beta_0) \quad \text{für} \quad \beta = \beta_0$$

eindeutig bestimmt ist. Aus $\xi_\beta = \frac{B_\alpha}{A}\eta$ folgt $\xi(0, \beta) = 0$ für alle $\beta$, wenn nur $\xi(0, \beta_0) = 0$ ist. Das Integral (10) für $\zeta$ läßt sich in diesem Falle

auf die Form bringen:

$$\zeta = 1 + \int_0^{\alpha} \xi(\sigma, \beta) A(\sigma, \beta) d\sigma. \tag{13}$$

Hieraus folgern wir: *Ist ein Kurvenstück* $\mathfrak{C}$ *gegeben, das durch* $S$ *hindurchgeht, und als Bild der Meridiankurve* $\beta = \beta_0$ *von* $\mathfrak{S}$ *in entsprechenden Punkten mit dieser sphärischen Kurve parallele Tangenten hat, so existiert ein und nur ein Flächenstück* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$, *welches im Bereich*

$$0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1 < \pi, \quad \beta_0 \leqq \beta \leqq \beta_1$$

*Bildfläche von* $\mathfrak{S}$ *ist und durch das Kurvenstück* $\mathfrak{C}$ *hindurchgeht. Hierbei fällt der Pol* $S$ *mit seinem Bildpunkt zusammen.*

**18.** Da das System von Differentialgleichungen (L*) im ganzen Bereich

$$0 \leqq \alpha \leqq \pi, \quad \beta_0 \leqq \beta \leqq \beta_0 + 2\pi \tag{14}$$

regulär ist, läßt sich der Vektor $\mathfrak{x}$ über den ganzen Bereich (14) fortsetzen. Damit nun aber dieser Vektor eine geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ liefert, müssen zwei Forderungen erfüllt sein:

I. *Die Kurve* $\mathfrak{x}(\pi, \beta)$ *muß sich auf einen Punkt* $N'$ *als Bild von* $N$ *zusammenziehen, der dann neben* $S$ *den zweiten Nabel von* $\mathfrak{F}$ *liefert.*

II. *Die Bildfläche* $\mathfrak{F}$ *muß sich längs der Meridiankurve* $\beta = \beta_0$ *schließen, d. h.*

$$\mathfrak{x}(\alpha, \beta_0 + 2\pi) = \mathfrak{x}(\alpha, \beta_0). \tag{15}$$

Ist die Fläche $\mathfrak{F}$ geschlossen, aber noch nicht konvex, so läßt sich offenbar durch Wahl einer hinreichend großen Konstanten $k$ eine konvexe Parallelfläche von $\mathfrak{F}$ finden, die durch den Vektor $\mathfrak{x} + k\,\mathfrak{u}$ dargestellt wird.

Die Periodizitätsbedingung II erfordert eine schwierige Untersuchung, welche den Inhalt des Kapitels IV bildet, während das folgende Kapitel II sich mit der Bedingung I beschäftigt.

Zu I schicken wir eine Bemerkung voraus. Zieht sich die Randkurve $\mathfrak{x}(\pi, \beta)$ nicht auf einen Punkt zusammen, so hat die Fläche $\mathfrak{F}$ als Bildfläche von $\mathfrak{S}$ in allen Punkten der Randkurve $\alpha = \pi$ den gleichen Normalvektor $\mathfrak{N} = -\mathfrak{u}_N$, d. h. aber die Tangente der Randkurve steht immer auf der festen Richtung $\mathfrak{u}_N$ senkrecht; die Randkurve ist somit eine ebene Kurve, und die Fläche $\mathfrak{F}$ hat in jedem Punkte der Randkurve die gleiche Tangentialebene, d. h. aber $\zeta(\pi, \beta)$ ist von selbst unabhängig von $\beta$. Daraus folgt aber noch nichts über das Verhalten von $\xi$ und $\eta$ für $\alpha = \pi$.

## Kapitel II.

## Die Forderung für die Umgebung des zweiten Poles.

### § 4.

### Die Differentialgleichungen für die Hauptkrümmungsradien.

**19.** Zur Untersuchung der Forderung I erscheint die Darstellung (11) für $\mathfrak{x}$ ungeeignet. Wir benutzen daher in diesem Kapitel die aus (6) abgeleitete Integraldarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \int_{\alpha_0,\beta_0}^{\alpha,\beta} R_1 \mathfrak{u}_\alpha \, d\alpha + R_2 \mathfrak{u}_\beta \, d\beta, \tag{16}$$

wo $\mathfrak{x}_0$ den Wert von $\mathfrak{x}$ im Punkte $\alpha_0, \beta_0$ bedeutet. Damit das Integral (16) vom Wege unabhängig ist, müssen die Funktionen $R_1$ und $R_2$ so bestimmt werden, daß

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(R_1 \mathfrak{u}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(R_2 \mathfrak{u}_\beta) \tag{17}$$

ist. Dann sind die Gleichungen (6) von selbst erfüllt und $R_1$ und $R_2$ sind die beiden Hauptkrümmungsradien von $\mathfrak{x}$.

Aus (17) folgt

$$(R_1 - R_2)\mathfrak{u}_{\alpha\beta} = \frac{\partial R_2}{\partial \alpha}\mathfrak{u}_\beta - \frac{\partial R_1}{\partial \beta}\mathfrak{u}_\alpha.$$

Zerlegt man diese Vektorgleichung nach Komponenten in die drei zueinander senkrechten Richtungen $\mathfrak{u}$, $\frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A}$, $\frac{\mathfrak{u}_\beta}{B}$, so ergeben sich, da die Komponenten nach $\mathfrak{u}$ identisch verschwinden, die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial \beta} &= \frac{A_\beta}{A}(R_2 - R_1), \\ \frac{\partial R_2}{\partial \alpha} &= \frac{B_\alpha}{B}(R_1 - R_2). \end{aligned}} \tag{18}$$

Eine Lösung dieses Systems ist eindeutig bestimmt, wenn man sich die Werte von $R_1$ für $\beta = \beta_0$ und von $R_2$ für $\alpha = \alpha_0$ willkürlich vorgibt. Indem man jede der beiden Gleichungen als gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung auffaßt, und zwar die erste mit $R_1$, die zweite mit $R_2$ als zu bestimmende Funktion, ergibt sich aus (18)

$$R_1(\alpha,\beta) = \frac{A(\alpha,\beta_0)}{A(\alpha,\beta)} R_1(\alpha,\beta_0) + \frac{1}{A(\alpha,\beta)} \int_{\beta_0}^{\beta} R_2(\alpha,\tau) A_\tau(\alpha,\tau)\, d\tau, \tag{19}$$

$$R_2(\alpha,\beta) = \frac{B(\alpha_0,\beta)}{B(\alpha,\beta)} R_2(\alpha_0,\beta) + \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1(\sigma,\beta) B_\sigma(\sigma,\beta)\, d\sigma. \tag{20}$$

**20.** Diese Beziehungen dienen dazu, einen für das Folgende wichtigen Hilfssatz zu beweisen:

Lemma. *Es sei*

$$\lim_{\alpha \to 0} B(\alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta) \to 0, \tag{21}$$

*ferner existiere*

$$\lim_{\alpha \to 0} R_1(\alpha, \beta_0) = R_0. \tag{22}$$

*Dann ist*

$$\lim_{\alpha \to 0} R_1(\alpha, \beta) = \lim_{\alpha \to 0} R_2(\alpha, \beta) = R_0, \tag{23}$$

*wo $R_0$ eine feste von $\beta$ unabhängige Zahl ist.*

Das heißt in Worten: Die Bedingungen (21) und (22) sind bereits hinreichend dafür, daß der Punkt $\alpha = 0$ ein Nabelpunkt der Bildfläche $\mathfrak{x}$ ist.

Beweis. Aus (3) folgt

$$\lim_{\alpha \to 0} A_\beta(\alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta) \to \psi(\beta) B(0, \beta) R_2(0, \beta) = 0. \tag{24}$$

Außerdem ist wegen (4)

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{A(\alpha, \beta_0)}{A(\alpha, \beta)} \to 1. \tag{25}$$

Geht man in (19) zur Grenze $\alpha \to 0$ über, so ergibt sich wegen (22), (24) und (25)

$$R_1(0, \beta) = R_1(0, \beta_0) = R_0. \tag{26}$$

Nunmehr lasse man in (20) zunächst $\alpha_0$ nach 0 streben. Man erhält dann wegen (21)

$$R_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^\alpha R_1(\sigma, \beta) B_\sigma(\sigma, \beta) \, d\sigma. \tag{27}$$

Aus (3) folgt

$$B_\alpha = A\left(\frac{d\vartheta}{d\beta} + \alpha \Omega_1\right).$$

Da beständig $A > 0$, $\frac{d\vartheta}{d\beta} > 0$, so existiert eine feste Zahl $\alpha_1 > 0$, derart, daß für $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ auch

$$B_\alpha > 0$$

ist. Es läßt sich daher auf das Integral (27) der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden, solange $\alpha$ dem Intervall $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ angehört, und man erhält aus (27)

$$R_2(\alpha, \beta) = R_1(\bar{\alpha}, \beta) \frac{B(\alpha, \beta) - B(0, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = R_1(\bar{\alpha}, \beta). \tag{28}$$

Hierbei bedeutet $\bar{\alpha}$ einen Mittelwert zwischen 0 und $\alpha$ $(0 < \bar{\alpha} < \alpha)$. Da nun aber mit $\alpha$ auch $\bar{\alpha}$ gegen 0 geht, so schließt man aus (28)

$$\lim_{\alpha \to 0} R_2(\alpha, \beta) = R_1(0, \beta).$$

Hieraus folgt aber in Verbindung mit (26) die Behauptung (23), w. z. b. w.

Ist die Voraussetzung (21) erfüllt, so ist auch

$$\lim_{\alpha \to 0} R_2 \mathfrak{u}_\beta \to 0.$$

Geht man nunmehr in Formel (16) mit $\alpha_0$ zur Grenze über, so ergibt sich für $\mathfrak{x}$ die Integraldarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \int_0^\alpha R_1(\sigma, \beta)\, \mathfrak{u}_\sigma(\sigma, \beta)\, d\sigma. \tag{29}$$

## § 5.

## Darstellung der Hauptkrümmungsradien durch Greensche Funktionen.

**21.** Betrachtet man das System von Differentialgleichungen (18), so bemerkt man leicht, daß dieses System auch die notwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert, daß der Ausdruck

$$R_1 \zeta_\alpha\, d\alpha + R_2 \zeta_\beta\, d\beta$$

für jede Lösung $\zeta$ der Differentialgleichung (L) ein vollständiges Differential ist; mithin muß das Integral dieses Ausdrucks über einen geschlossenen Weg verschwinden. Indem man einen rechteckigen Integrationsweg wählt, ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^{\alpha_0} R_1(\sigma, \beta)\, \zeta_\sigma(\sigma, \beta)\, d\sigma + \int_\beta^{\beta_0} R_2(\alpha_0, \tau)\, \zeta_\tau(\alpha_0, \tau)\, d\tau \\ &- \int_\alpha^{\alpha_0} R_1(\sigma, \beta_0)\, \zeta_\sigma(\sigma, \beta_0)\, d\sigma - \int_\beta^{\beta_0} R_2(\alpha, \tau)\, \zeta_\tau(\alpha, \tau)\, d\tau = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 0 < \alpha < \alpha_0 \\ \beta < \beta_0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

und zwar gilt diese Beziehung für jedes Integral $\zeta$ der Differentialgleichung (L) und für jede Lösung $R_1, R_2$ des Systems (18).

**22.** Die Formel (30) benutzen wir, um $R_1$ und $R_2$ durch Greensche Funktionen darzustellen, entsprechend dem bekannten Riemannschen Ausdruck für die Integrale der Differentialgleichung (L) vom hyperbolischen Typus. Wir führen zwei Funktionen ein:

$$G(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0), \qquad H(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \qquad \begin{pmatrix} 0 < \alpha \leqq \alpha_0 \\ \beta \leqq \beta_0 \end{pmatrix},$$

die bezüglich des ersten Paares von Veränderlichen $\alpha, \beta$ beide Integrale von (L) sind. Sie seien eindeutig bestimmt durch die Randbedingungen

$$(31)\qquad \boxed{\begin{aligned} &G(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0)=1 \quad , \quad G(\alpha_0\beta;\alpha_0\beta_0)=\frac{A(\alpha_0\beta)}{A(\alpha_0\beta_0)},\\ &H(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0)=\frac{B(\alpha\beta_0)}{B(\alpha_0\beta_0)}, \quad H(\alpha_0\beta;\alpha_0\beta_0)=1. \end{aligned}}$$

Die beiden Funktionen $G$ und $H$ hängen, wie man leicht verifiziert, mit der Riemannschen Parametrix $p(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$ durch die Gleichung

$$(32)\qquad p=G+H-1$$

zusammen, denn $p$ ist nach Riemann durch die Randbedingungen

$$(33)\qquad p(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0)=\frac{B(\alpha\beta_0)}{B(\alpha_0\beta_0)}, \quad p(\alpha_0\beta;\alpha_0\beta_0)=\frac{A(\alpha_0\beta)}{A(\alpha_0\beta_0)}$$

eindeutig bestimmt.

Setzt man für $\zeta(\alpha,\beta)$ erst $G(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$ und dann $H(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$ in (30) ein, so ergibt sich

$$(34)\qquad \begin{cases} \int_{\beta}^{\beta_0} R_2(\alpha_0,\tau)\frac{A_\tau(\alpha_0,\tau)}{A(\alpha_0,\beta_0)}\,d\tau=\int_{\beta}^{\beta_0} R_2(\alpha,\tau)\,G_\tau(\alpha\tau;\alpha_0\beta_0)\,d\tau-\int_{\alpha}^{\alpha_0} R_1(\sigma,\beta)\,G_\sigma(\sigma\beta;\alpha_0\beta_0)\,d\sigma,\\ \int_{\alpha}^{\alpha_0} R_1(\sigma,\beta_0)\frac{B_\sigma(\sigma,\beta_0)}{B(\alpha_0,\beta_0)}\,d\sigma=\int_{\alpha}^{\alpha_0} R_1(\sigma,\beta)\,H_\sigma(\sigma\beta;\alpha_0\beta_0)\,d\sigma-\int_{\beta}^{\beta_0} R_2(\alpha,\tau)\,H_\tau(\alpha\tau;\alpha_0\beta_0)\,d\tau. \end{cases}$$

Für das Folgende ist es vorteilhafter die Bezeichnung abzuändern, indem man $\alpha, \beta$ und $\alpha_0, \beta_0$ miteinander vertauscht; dann schreibt man statt (34)

$$(35)\qquad \begin{cases} \int_{\beta_0}^{\beta} R_2(\alpha\tau)\frac{A_\tau(\alpha\tau)}{A(\alpha\beta)}\,d\tau=\int_{\beta_0}^{\beta} R_2(\alpha_0\tau)\,G_\tau(\alpha_0\tau;\alpha\beta)\,d\tau-\int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1(\sigma\beta_0)\,G_\sigma(\sigma\beta_0;\alpha\beta)\,d\sigma,\\ \int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1(\sigma\beta)\frac{B_\sigma(\sigma\beta)}{B(\alpha\beta)}\,d\sigma=\int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1(\sigma\beta_0)\,H_\sigma(\sigma\beta_0;\alpha\beta)\,d\sigma-\int_{\beta_0}^{\beta} R_2(\alpha_0\tau)\,H_\tau(\alpha_0\tau;\alpha\beta)\,d\tau. \end{cases}$$

Hierbei ist nunmehr $0<\alpha_0\leqq\alpha,\ \beta_0\leqq\beta$. Für die beiden Integrale auf den linken Seiten der beiden Gleichungen (35) substituiere man ihre den Formeln (19) und (20) entnommenen Werte. Man erhält dann

$$(36)\qquad \begin{cases} R_1(\alpha\beta)=R_1(\alpha\beta_0)\frac{A(\alpha\beta_0)}{A(\alpha\beta)}\\ \qquad\qquad -\int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1(\sigma\beta_0)\,G_\sigma(\sigma\beta_0;\alpha\beta)\,d\sigma+\int_{\beta_0}^{\beta} R_2(\alpha_0\tau)\,G_\tau(\alpha_0\tau;\alpha\beta)\,d\tau,\\ R_2(\alpha\beta)=R_2(\alpha_0\beta)\frac{B(\alpha_0\beta)}{B(\alpha\beta)}\\ \qquad\qquad +\int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1(\sigma\beta_0)\,H_\sigma(\sigma\beta_0;\alpha\beta)\,d\sigma-\int_{\beta_0}^{\beta} R_2(\alpha_0\tau)\,H_\tau(\alpha_0\tau;\alpha\beta)\,d\tau. \end{cases}$$

## § 6.

## Die Greenschen Funktionen in der Umgebung eines Pols.

**23.** Um die Greenschen Funktionen

$$G(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0), \qquad H(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$$

im ganzen Bereich

$$0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0, \qquad \beta \leqq \beta_0 \tag{37}$$

zu studieren, berücksichtigen wir, daß die beiden Funktionenpaare

$$\xi = \frac{G_\alpha(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)}{A(\alpha\beta)}, \qquad \eta = \frac{G_\beta(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)}{B(\alpha\beta)}$$

einerseits und

$$\xi = \frac{H_\alpha(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)}{A(\alpha\beta)}, \qquad \eta = \frac{H_\beta(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)}{B(\alpha\beta)}$$

andererseits in dem Bereich (37) bezüglich des ersten Paares von Veränderlichen $\alpha, \beta$ dem dort regulären System von Differentialgleichungen ($L^*$) genügen und durch die Werte von $\xi$ für $\beta = \beta_0$ und $\eta$ für $\alpha = \alpha_0$ eindeutig bestimmt sind. In unserem Falle hat man wegen (31)

$$\begin{cases} \dfrac{G_\alpha(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0)}{A(\alpha\beta_0)} = 0, & \dfrac{G_\beta(\alpha_0\beta;\alpha_0\beta_0)}{B(\alpha_0\beta)} = \dfrac{1}{A(\alpha_0\beta_0)} \cdot \dfrac{A_\beta(\alpha_0\beta)}{B(\alpha_0\beta)}; \\ \dfrac{H_\alpha(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0)}{A(\alpha\beta_0)} = \dfrac{1}{B(\alpha_0\beta_0)} \dfrac{B_\alpha(\alpha\beta_0)}{A(\alpha\beta_0)}, & \dfrac{H_\beta(\alpha_0\beta;\alpha_0\beta_0)}{B(\alpha_0\beta)} = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Nun ist aber

$$\begin{cases} G(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0) = G(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0) + \displaystyle\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{G_\tau(\alpha\tau;\alpha_0\beta_0)}{B(\alpha\tau)} B(\alpha\tau)\, d\tau, \\ H(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0) = H(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0) + \displaystyle\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{H_\tau(\alpha\tau;\alpha_0\beta_0)}{B(\alpha\tau)} B(\alpha\tau)\, d\tau. \end{cases} \tag{39}$$

In diesen Formeln setze man wegen (31)

$$G(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0) = 1, \qquad H(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0) = \frac{B(\alpha\beta_0)}{B(\alpha_0\beta_0)}$$

und gehe dann zur Grenze $\alpha \to 0$ über. Da sich dann auch $B(\alpha\tau)$ wegen (1) stetig der 0 nähert, andererseits aber $\frac{G_\tau}{B}$ und $\frac{H_\tau}{B}$ endlich bleiben, so verschwinden die Integrale auf der rechten Seite von (39) und es ergibt sich

$$\lim_{\alpha\to 0} G(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0) \to 1, \qquad \lim_{\alpha\to 0} H(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0) \to 0. \tag{40}$$

Solange demnach $\alpha_0$ und $\beta_0$ festgehalten werden und $\alpha_0 > 0$ ist, sind die Funktionen $G$ und $H$ im ganzen Bereich (37) stetig in $\alpha$ und $\beta$.

**24.** Dies vorausgeschickt, gehen wir in den Darstellungen (36) für $R_1$ und $R_2$ zur Grenze $\alpha_0 \to 0$ über, indem wir zunächst

$$\lim_{\alpha \to 0} R_1(\alpha\beta_0) \to R_0, \qquad \lim_{\alpha \to 0} B(\alpha\beta) R_2(\alpha\beta) \to 0 \tag{41}$$

voraussetzen, so daß mithin nach dem Lemma des Abschnitts **20**, § 4 $R_1$ und $R_2$ zu einer Bildfläche $\mathfrak{x}$ gehören, die im Punkte $\alpha = 0$ einen Nabel hat. Man erhält dann aus (36)

$$R_1(\alpha\beta) = \frac{A(\alpha\beta_0)}{A(\alpha\beta)} R_1(\alpha\beta_0) - \int_0^\alpha R_1(\sigma\beta_0) G_\sigma(\sigma\beta_0; \alpha\beta)\, d\sigma$$

$$R_2(\alpha\beta) = \int_0^\alpha R_1(\sigma\beta_0) H_\sigma(\sigma\beta_0; \alpha\beta)\, d\sigma.$$

Die partielle Integration der beiden Integrale rechter Hand ergibt mit Rücksicht auf (31) und (40)

$$\boxed{\begin{aligned} R_1(\alpha\beta) &= R_0 + \int_0^\alpha \frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma} G(\sigma\beta_0; \alpha\beta)\, d\sigma, \\ R_2(\alpha\beta) &= R_1(\alpha\beta_0) - \int_0^\alpha \frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma} H(\sigma\beta_0; \alpha\beta)\, d\sigma. \end{aligned}} \tag{42}$$

Diese Darstellungen für $R_1$ und $R_2$ zeigen, daß die beiden Krümmungsradien durch die Werte von $R_1$ auf der Meridiankurve $\beta = \beta_0$ eindeutig bestimmt sind. Mit $R_1(\alpha\beta_0)$ ist aber wegen (29) das Bild der Meridiankurve $\beta = \beta_0$ gegeben.

Ist umgekehrt $R_1(\sigma\beta_0)$ eine beliebige im Intervall $0 \leqq \sigma \leqq \pi$ einmal stetig differentiierbare Funktion, und bildet man mit ihr die beiden Ausdrücke (42), so genügen die so erhaltenen Funktionen $R_1(\alpha\beta)$, $R_2(\alpha\beta)$ dem System von Differentialgleichungen (18). Diese Behauptung verifiziert man leicht, auch ohne daß man die zweite Beziehung (41) voraussetzt, mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(\sigma\tau; \alpha\beta)}{\partial\beta} = \dfrac{A_\beta(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)} (1 - G(\sigma\tau; \alpha\beta) - H(\sigma\tau; \alpha\beta)), \\ \dfrac{\partial H(\sigma\tau; \alpha\beta)}{\partial\alpha} = \dfrac{B_\alpha(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)} (1 - G(\sigma\tau; \alpha\beta) - H(\sigma\tau; \alpha\beta)). \end{cases} \tag{43}$$

Die Formeln (43) beweist man wiederum, indem man erstens berücksichtigt, daß die Funktionen $\dfrac{\partial G(\sigma\tau; \alpha\beta)}{\partial\beta}$ und $\dfrac{\partial H(\sigma\tau; \alpha\beta)}{\partial\alpha}$ in bezug auf das erste Paar von Veränderlichen $\sigma\tau$ Integrale der Differentialgleichung (L) sind und indem man zweitens die Randwerte dieser beiden Funktionen für $\sigma = \alpha$ und $\tau = \beta$ berechnet.

Die Formeln (42) liefern somit bei beliebig vorgegebenen $R_1(\sigma\beta_0)$ zunächst nur im Bereiche $0 < \alpha < \pi$, $\beta \leqq \beta_0$ eine Bildfläche $\mathfrak{F}$ des vorgegebenen Kurvensystems $\mathfrak{S}$. Durch Wahl einer hinreichend großen Konstante $c$ kann man, indem man $R_1(\sigma\beta_0)$ durch $R_1(\sigma\beta_0) + c$ ersetzt, immer erreichen, daß die beiden Krümmungsradien positiv werden und mithin die zu ihnen gehörige Bildfläche konvex wird. Der Addition einer Konstanten $c$ entspricht aber der „Übergang von einer Bildfläche $\mathfrak{F}$ zu einer Parallelfläche von $\mathfrak{F}$".

## § 7.

## Hinreichende und notwendige Bedingungen.

**25.** Nachdem im vorigen Paragraphen die Bildfläche $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{S}$ im Gebiet $0 < \alpha < \pi$; $\beta \leqq \beta_0$ konstruiert wurde, hat man nunmehr die Bildfläche $\mathfrak{F}$ auch an den Rändern $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ zu untersuchen. Es wird sich zeigen, daß die durch die Formeln (42) und (29) bestimmte Fläche $\mathfrak{F}$ für $\alpha = 0$ immer von selbst einen Nabel hat, während die Funktion $R_1(\sigma\beta_0)$ noch einer weiteren Bedingung genügen muß, damit $\mathfrak{F}$ auch für $\alpha = \pi$ einen Nabel hat.

Nach dem Lemma des § 4 hat $\mathfrak{F}$ für $\alpha = 0$ als Bild von $S$ nur dann einen Nabel, wenn

$$\lim_{\alpha \to 0} B(\alpha\beta) R_2(\alpha\beta) \to 0.$$

Man setze

$$H^*(\sigma\tau; \alpha\beta) = B(\alpha\beta) H(\sigma\tau; \alpha\beta), \tag{44}$$

dann folgt aus (42)

$$B(\alpha\beta) R_2(\alpha\beta) = B(\alpha\beta) R_1(\alpha\beta_0) - \int_0^{\alpha} \frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma} H^*(\sigma\beta_0; \alpha\beta)\, d\sigma. \tag{45}$$

Um $H^*(\sigma\tau; \alpha\beta)$ auch an den Rändern $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ zu untersuchen, gehen wir zu den Funktionen

$$\xi = \frac{H^*_\sigma(\sigma\tau; \alpha\beta)}{A(\sigma\tau)}, \qquad \eta = \frac{H^*_\tau(\sigma\tau; \alpha\beta)}{B(\sigma\tau)} \tag{46}$$

über, die als Funktionen des ersten Paares von Veränderlichen $\sigma, \tau$ betrachtet, dem System von Differentialgleichungen (L*) genügen. Nach (38) erhält man außerdem für die Randwerte

$$\xi(\sigma\beta; \alpha\beta) = \frac{B_\alpha(\sigma\beta)}{A(\sigma\beta)}, \qquad \eta(\alpha\tau; \alpha\beta) = 0. \tag{47}$$

Da nun aber das System von Differentialgleichungen (L*) im ganzen Bereich

$$0 \leqq \sigma \leqq \alpha \leqq \pi, \qquad \tau \leqq \beta \tag{48}$$

regulär ist, und das gleiche für die Randwerte (47) gilt, so sind auch die Funktionen (46) im ganzen Bereich (48) regulär. Wegen (40) ist dann aber auch

$$H^*(\sigma\tau;\alpha\beta)=\int_0^{\sigma}\xi(s\tau;\alpha\beta)\,A(s\tau)\,ds \tag{49}$$

eine im Bereiche (48) reguläre Funktion.

Geht man in Formel (45) zur Grenze $\alpha\to 0$ über, so erhält man demnach

$$\lim_{\alpha\to 0} B(\alpha\beta)\,R_2(\alpha\beta)\to 0,$$

und somit hat die Fläche $\mathfrak{F}$, die zu den durch die Formeln (42) gegebenen Krümmungsradien $R_1$ und $R_2$ gehört, immer einen Nabel für $\alpha=0$. Der Vektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{F}$ wird hierbei durch die Formel (29) dargestellt.

**26.** Geht man aber in (45) zur Grenze $\alpha\to\pi$ über, so ergibt sich

$$\lim_{\alpha\to\pi} B(\alpha\beta)\,R_2(\alpha\beta)=-\int_0^{\pi}\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}H^*(\sigma\beta_0;\pi\beta)\,d\sigma.$$

Damit die Fläche $\mathfrak{F}$ nun auch für $\alpha=\pi$ einen Nabel hat, muß daher nach dem Lemma des § 4 die Funktion $R_1(\sigma\beta_0)$ so gewählt werden, daß die Gleichung

$$\boxed{\int_0^{\pi}\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}H^*(\sigma\beta_0;\pi\beta)\,d\sigma=0} \tag{50}$$

identisch in $\beta$ für alle $\beta\leqq\beta_0$ befriedigt ist.

Die Gleichung (50) liefert mithin die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Forderung I des § 3 erfüllt ist. Ob sich überhaupt immer Funktionen $R_1(\sigma\beta_0)$ finden lassen, die der Bedingung (50) genügen, ist eine schwierige Frage, die für den Fall, daß das Kurvensystem $\mathfrak{S}$ auf der Kugel analytisch vorausgesetzt wird, in den folgenden §§ 8 bis 10 untersucht werden wird. Im analytischen Falle läßt sich nämlich die Bedingung (50) weiter umformen, indem man für die Funktion $H^*(\sigma\beta_0;\pi\beta)$ nach geeigneten Reihenentwicklungen sucht; es schälen sich dann einige interessante Fälle heraus, in denen sich die Gleichung (50) sicherlich durch unendlich viele, linear unabhängige Funktionen $R_1(\sigma\beta_0)$ befriedigen läßt.

## § 8.

### Bericht über die Laplacesche Kaskadenmethode.

**27.** In diesem und im folgenden Paragraphen soll über eine Methode zur Integration der Differentialgleichung (L) berichtet werden, die zu der

bekannten Laplaceschen Kaskadenmethode in enger Beziehung steht[9]). Wir setzen in diesen beiden Paragraphen voraus, daß die Koeffizienten $\frac{A_\beta}{A}$ und $\frac{B_\alpha}{B}$ der Differentialgleichung (L) analytische Funktionen von $\alpha$ und $\beta$ sind und gehen von einer formalen Reihe[10])

$$\Sigma \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_\nu(\alpha\beta)\,\varphi_\nu(\alpha) \tag{51}$$

aus, wo die $\zeta_\nu(\alpha\beta)$ und $\varphi_\nu(\alpha)$ beliebige analytisshe Funktionen bedeuten und die $\varphi_\nu(\alpha)$ der Bedingung

$$\frac{d\varphi_{\nu+1}(\alpha)}{d\alpha} = \varphi_\nu(\alpha) \quad \text{für alle} \quad \nu \geqq 0 \tag{52}$$

genügen. Indem wir die Reihe $\Sigma$ unter Benutzung von (52) gliedweise differentiieren, bilden wir den Ausdruck

$$L(\Sigma) = L_0(\alpha\beta)\frac{d\varphi_0(\alpha)}{d\alpha} + \sum_{\nu=0}^{\infty} L_{\nu+1}(\alpha\beta)\,\varphi_\nu(\alpha). \tag{53}$$

Hierbei wird offenbar

$$L_0 = \frac{\partial\zeta_0}{\partial\beta} - \frac{A_\beta}{A}\zeta_0, \qquad L_{\nu+1} = \frac{\partial\zeta_{\nu+1}}{\partial\beta} - \frac{A_\beta}{A}\zeta_{\nu+1} + L(\zeta_\nu). \tag{54}$$

Wir nennen nunmehr die Reihe $\Sigma$ eine formale Lösung der Differentialgleichung (L), wenn alle Koeffizienten $L_\nu$ der Reihe (53) verschwinden, d. h. mit anderen Worten, wenn die Reihe $\Sigma$ der Differentialgleichung (L) identisch in allen Funktionen $\varphi_\nu(\alpha)$, die die Bedingungen (52) erfüllen, formal genügt.

Aus (54) lassen sich für eine formale Lösung $\Sigma$ leicht Rekursionsformeln für die Funktionen $\zeta_\nu(\alpha\beta)$ ableiten, und zwar ergibt sich

$$\begin{cases} \zeta_0(\alpha\beta) = \chi_0(\alpha)\,A(\alpha\beta), \\ \zeta_{\nu+1}(\alpha\beta) = A(\alpha\beta)\left(\chi_{\nu+1}(\alpha) - \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{L(\zeta_\nu)}{A}(\alpha\tau)\,d\tau\right). \end{cases} \tag{55}$$

Hierbei bedeuten die $\chi_\nu(\alpha)$ willkürliche analytische Funktionen von $\alpha$.

**28.** Die Formeln (55) lassen erkennen, daß die Koeffizienten $\zeta_\nu(\alpha\beta)$ einer formalen Lösung wegen der $\chi_\nu(\alpha)$ nicht eindeutig bestimmt sind. Bezeichnen $\zeta_\nu$ und $\zeta_\nu^*$ zwei verschiedene Folgen von Koeffizienten, die, in Reihe (51) eingesetzt, beide zu einer formalen Lösung $\Sigma$ führen, so besteht zwischen den $\zeta_\nu$ und den $\zeta_\nu^*$ ein einfacher Zusammenhang, den man

---

[9]) Vgl. Fußnote [2]) der Einleitung und Fußnote [11]) des § 9.

[10]) Unter einer formalen Reihe werde eine Reihe verstanden, mit der ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz gerechnet wird, die mithin keinen bestimmten Wert bzw. keine bestimmte Funktion darzustellen braucht.

aus den Formeln (54) leicht folgert. Es ist nämlich

$$\zeta_\nu^*(\alpha\beta) = \mathsf{X}_{\nu 0}(\alpha)\, A(\alpha\beta) + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \mathsf{X}_{\nu\varkappa}(\alpha)\, \zeta_\varkappa(\alpha\beta). \tag{56}$$

Hierbei bedeuten die $\mathsf{X}_{\nu\varkappa}(\alpha)$ analytische Funktionen von $\alpha$ allein, die in gewisser Weise von den $\chi_\nu(\alpha)$ der Formeln (55) abhängen. Auf die Beziehungen, die zwischen den Koeffizienten $\mathsf{X}_{\nu\varkappa}(\alpha)$ bestehen, brauchen wir hier nicht näher einzugehen. Wichtig ist für uns nur, daß, wie aus (56) hervorgeht, $\zeta_\nu^*(\alpha\beta)$ eine homogene lineare Verbindung der $\nu+1$ Funktionen $A, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu$ ist, deren Koeffizienten $\mathsf{X}_{\nu\varkappa}$ noch von $\alpha$ abhängen. Um dies anzudeuten, schreiben wir in leichtverständlicher Abkürzung für die Formel (56)

$$\zeta_\nu^*(\alpha\beta) = [A, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu]_\alpha. \tag{57}$$

**29.** Um aus der formalen Reihe $\Sigma$ eine wirkliche Lösung der Differentialgleichung (L) zu erhalten, betrachte man diejenige spezielle Folge von Koeffizienten $\mathring{\zeta}_\nu$, bei welcher in den Formeln (55) $\chi_0 = 1$ und $\chi_{\nu+1} = 0$ für alle $\nu \geqq 0$ gesetzt ist. Es sei somit

$$\mathring{\zeta}_0(\alpha\beta) = A(\alpha\beta),$$

$$\mathring{\zeta}_{\nu+1}(\alpha\beta;\beta_0) = -A(\alpha\beta)\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{L(\mathring{\zeta}_\nu)}{A}(\alpha\tau)\, d\tau.$$

Außerdem bilde man die Funktionen

$$\mathring{\varphi}_0(\alpha) = \varphi(\alpha), \qquad \mathring{\varphi}_\nu(\alpha;\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{(\alpha-\sigma)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\varphi(\sigma)\, d\sigma, \tag{58}$$

wo $\varphi(\alpha)$ eine willkürliche analytische Funktion von $\alpha$ bedeutet; dann genügen die $\mathring{\varphi}_\nu(\alpha;\alpha_0)$ offenbar der Bedingung (52). Nunmehr läßt sich zeigen, daß die Reihe

$$\mathring{\Sigma} = A(\alpha\beta)\varphi(\alpha) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathring{\zeta}_\nu(\alpha\beta;\beta_0)\,\mathring{\varphi}_\nu(\alpha;\alpha_0) \tag{59}$$

in einem Bereich der $\alpha, \beta$-Ebene, der den Punkt $\alpha_0, \beta_0$ enthält nnd in dem die Differentialgleichung (L) regulär analytisch ist, konvergiert und dort eine Lösung der Differentialgleichung liefert, wofern nur $|\alpha - \alpha_0|$ hinreichend klein ist. Offenbar lassen sich durch die Reihe $\mathring{\Sigma}$ alle diejenigen Integrale $\zeta$ der Differentialgleichung (L) darstellen, die für $\alpha = \alpha_0$ die Werte

$$\zeta(\alpha_0\beta) = \text{konst.}\, A(\alpha_0\beta)$$

annehmen. Die willkürliche Funktion $\varphi(\alpha)$ der Reihe $\mathring{\Sigma}$ wird durch die Gleichung

$$\varphi(\alpha) = \frac{\zeta(\alpha\beta_0)}{A(\alpha\beta_0)}$$

bestimmt.

**30.** Entsprechend lassen sich auch formale Lösungen von (L) angeben, die nach willkürlichen Funktionen $\psi_\nu(\beta)$ fortschreiten, wobei wieder

$$\frac{d\psi_{\nu+1}(\beta)}{d\beta} = \psi_\nu(\beta) \quad \text{(für alle } \nu \geqq 0\text{)} \tag{60}$$

vorausgesetzt wird. Bildet man

$$\Sigma' \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta'_{-\nu}(\alpha\beta)\,\psi_\nu(\beta),$$

so ist $\Sigma'$ eine formale Lösung von (L), wenn die Koeffizienten $\zeta'_{-\nu}$ aus den Rekursionsformeln

$$\begin{cases} \zeta_0(\alpha\beta) = \chi'_0(\beta), \\ \zeta'_{-\nu-1}(\alpha\beta) = B(\alpha\beta)\left(\chi_{-\nu-1}(\beta) - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{L(\zeta'_{-\nu})}{B}(\sigma\beta)\,d\sigma\right) \end{cases} \tag{61}$$

gewonnen werden.

Sind $\zeta'_{-\nu}$ und $\zeta'^{*}_{-\nu}$ zwei verschiedene Koeffizientenfolgen, die beide zu formalen Lösungen $\Sigma'$ von (L) gehören, so folgert man aus (61) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \zeta'^{*}_{-\nu}(\alpha\beta) &= \mathsf{X}_{-\nu,0}(\beta)\,B(\alpha\beta) + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \mathsf{X}_{-\nu,\varkappa}(\beta)\,\zeta'_{-\nu}(\alpha\beta) \\ &= [B, \zeta'_{-1}, \zeta'_{-2}, \ldots, \zeta'_{-\nu}]_\beta . \end{aligned} \tag{62}$$

Eine konvergente Lösung von (L) erhält man wieder, indem man in (61) $\chi'_0(\beta) = 1$ und alle übrigen $\chi'_{-\nu}(\beta) = 0$ setzt. Dann ergibt sich

$$\mathring{\zeta}'_0(\alpha\beta) = B(\alpha\beta), \qquad \mathring{\zeta}'_{-\nu-1}(\alpha\beta;\alpha_0) = -B(\alpha\beta)\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{L(\zeta'_{-\nu})}{B}(\sigma\beta)\,d\sigma .$$

Außerdem bilde man die Funktionen

$$\mathring{\psi}_0(\beta) = \psi(\beta), \qquad \mathring{\psi}_\nu(\beta;\beta_0) = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{(\beta-\tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\psi(\tau)\,d\tau, \tag{63}$$

wo $\psi(\beta)$ eine beliebige analytische Funktion von $\beta$ bedeutet. Nunmehr ist die Reihe

$$\mathring{\Sigma}' = B(\alpha,\beta)\,\psi(\beta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathring{\zeta}'_{-\nu}(\alpha\beta;\alpha_0)\,\mathring{\psi}_\nu(\beta;\beta_0) \tag{64}$$

in einem Bereich der $\alpha,\beta$-Ebene, der den Punkt $\alpha_0,\beta_0$ enthält und in dem die Differentialgleichung (L) regulär analytisch ist, konvergent, wofern nur $|\beta-\beta_0|$ hinreichend klein ist; und die durch sie dargestellte Funktion ist ein Integral dieser Differentialgleichung. Durch die Reihe $\mathring{\Sigma}'$ lassen sich offenbar alle diejenigen Integrale $\zeta$ der Differentialgleichung (L)

darstellen, welche für $\beta = \beta_0$ die Werte

$$\zeta(\alpha\beta_0) = \text{konst.}\, B(\alpha\beta_0)$$

annehmen; die willkürliche Funktion $\psi(\beta)$ der Reihe $\mathring{\Sigma}'$ wird durch die Gleichung

$$\psi(\beta) = \frac{\zeta(\alpha_0\beta)}{B(\alpha_0\beta)}$$

bestimmt.

**31.** Man bemerkt nunmehr leicht, daß sich jedes Integral $\zeta$ von (L) in mehrfacher Weise als Summe zweier Reihen (59) und (64)

$$\zeta(\alpha\beta) = \mathring{\Sigma} + \mathring{\Sigma}'$$

darstellen läßt, wobei die beiden willkürlichen Funktionen $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ in einfacher Weise durch die Randwerte $\zeta(\alpha\beta_0)$ und $\zeta(\alpha_0\beta)$ (aber nicht eindeutig) bestimmt werden. Doch wird im folgenden von dieser Tatsache kein Gebrauch gemacht.

## § 9.

## Fortsetzung des Berichts: Laplacescher Fall. Anwendung der Methode auf andere Differentialgleichungen.

**32.** Von besonderem Interesse ist der Fall, daß unter den Koeffizientenfolgen $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$, die zu formalen Lösungen $\Sigma$ der Differentialgleichung (L) gehören, auch endliche Koeffizientenfolgen existieren; d. h. es sei z. B. $\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \ldots$ eine bestimmte Folge, derart, daß $\tilde{\zeta}_{n+\nu} = 0$ für alle $\nu \geqq 1$. Aus den Rekursionsformeln (55) folgert man leicht, daß dieser Fall dann und nur dann eintreten kann, wenn

$$L(\tilde{\zeta}_n) = 0$$

ist.

Es sind dann offenbar die endlichen Summen

$$\zeta = \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\zeta}_\nu(\alpha\beta)\,\varphi_\nu(\alpha) \tag{65}$$

Integrale der Differentialgleichung (L) für alle Funktionen $\varphi_\nu(\alpha)$, die den Bedingungen (52) genügen. Außerdem läßt sich in diesem Fall die Differentialgleichung (L) durch höchstens $n+1$ sukzessive Laplacesche Transformationen (Laplacesche Kaskadenmethode) auf eine einfache explizit integrable Form bringen[11]). Wir sagen daher: Die Differentialgleichung (L) ist nach Laplace bezüglich $\alpha$ integrabel.

---

[11]) Vgl. Darboux, loc. cit. Fußnote [2]) der Einleitung. Die Laplacesche Transformation führt zur Integration aller und nur derjenigen Differentialgleichungen (L), die endliche Summen der Form (65) zu Integralen haben. Somit läßt sich die eigent-

(Fortsetzung der Fußnote [11]) auf nächster Seite.)

Entsprechend nennen wir die Differentialgleichung (L) nach Laplace bezüglich $\beta$ integrabel, wenn unter den zu formalen Lösungen $\Sigma'$ gehörigen Koeffizientenfolgen $\zeta'_0, \zeta'_{-1}, \zeta'_{-2}, \ldots$ endliche Folgen existieren, d. h. wenn die Differentialgleichung (L) Integrale von der Form

$$\zeta = \sum_{\mu=0}^{m} \tilde{\zeta}'_{-\mu}(\alpha\beta)\,\psi_\mu(\beta) \tag{66}$$

besitzt, wo die $\psi_\mu$ beliebige Funktionen sind, die der Bedingung (66) genügen.

**33.** Wichtig für das Folgende ist ein allgemeiner Satz von Goursat-Lagally[12]):

*Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_p$ $p$ partikuläre Integrale der Differentialgleichung $L(z) = 0$. Zwischen ihnen bestehe eine quadratische Relation*

$$\sum_{\iota=1}^{p}\sum_{\varkappa=1}^{p} a_{\iota\varkappa} z_\iota z_\varkappa = 0 \qquad (a_{\iota\varkappa} = a_{\varkappa\iota}),$$

*wobei die $a_{\iota\varkappa}$ beliebige Konstante bezeichnen. Ist nun die Differentialgleichung (L) bezüglich $\alpha$ nach Laplace integrabel, so ist die Diffe-*

---

liche Kaskadenmethode nur in speziellen Fällen anwenden. Die allgemein gültige Entwicklung der Integrale $\zeta$ in unendliche Reihen der Form (51) ist unseres Wissens bisher noch nicht bemerkt worden.

Aus der Laplaceschen Transformation ergeben sich für die Summen (65) Darstellungen durch Differentialquotienten, die wir in § 11 (vgl. Formel (87)) benutzen.

Die Laplacesche Transformation läßt auch eine geometrische Deutung zu, auf die Darboux vor allem aufmerksam gemacht hat. Vgl. loc. cit. Fußnote [2]) Bd. II, 2. Aufl., S. 16–22.

Über die Fälle, in denen die Differentialgleichung (L) nach Laplace integrabel ist, und über die damit zusammenhängenden geometrischen Eigenschaften der zugehörigen Flächen vgl. außerdem noch die Arbeiten von

E. Goursat, Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace, Amer. Journ. of Math. **18** (1896), S. 347–385, vgl. insbesondere S. 377–382.

E. Bompiani, Sull' equazione di Laplace, Rend. del Circ. Mat. di Palermo **34** (1912), S. 383–407.

M. Lagally, Beitrag zur Laplaceschen Kaskadenmethode, Math. Annalen **80** (1921), S. 42–61.

M. Lagally, Über orthogonale Kurvensysteme in der Ebene, Sitzungsber. der Bayr. Akad. der Wiss. **1919**, S. 123–146.

E. Salkowski, Orthogonale Kurvensysteme in der Ebene und auf der Kugel, Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 136–141.

[12]) E. Goursat, loc. cit. Fußnote [11]), Amer. Journ. of Math. **18**, vgl. insbesondere S. 377–381.

M. Lagally, loc. cit. Fußnote [11]), Math. Annalen **80**, vgl. insbesondere S. 45–49.

Herrn Goursat verdankt man den angegebenen Satz für den wichtigen Spezialfall $p = 4$, der auch in den folgenden Ausführungen allein auftritt, während der Beweis für allgemeine $p$ zuerst von Herrn Lagally loc. cit. durchgeführt wurde.

*rentialgleichung auch bezüglich $\beta$ nach Laplace integrabel, und zwar besteht die Abschätzung*

$$|m-n| \leqq p-2,$$

*unter $n+1$ bzw. $m+1$ die Anzahl der Glieder in den Summen* (65) *bzw.* (66) *verstanden.*

In unserem Falle sind nun aber

$$z_1 = u, \quad z_2 = v, \quad z_3 = w, \quad z_4 = 1$$

nach Abschnitt **15** des § 2 partikuläre Integrale der Differentialgleichung (L), und wegen

$$u^2 + v^2 + w^2 - 1 = 0$$

ist somit die Voraussetzung des Goursat-Lagallyschen Satzes (für $p = 4$) erfüllt; d. h. aber: *Die Differentialgleichung* (L) *ist entweder bezüglich der beiden Veränderlichen $\alpha$ und $\beta$ nach Laplace integrabel, oder überhaupt nicht. Den Fall der Integrabilität nennen wir kurz den Laplaceschen Fall des Problems und sagen dann auch, das vorgelegte Problem und die Differentialgleichung* (L) *seien vom Laplaceschen Typus.*

**34.** Im Laplaceschen Falle gelten nun aber wegen (57) und (62) für alle $\zeta_\nu$ (bzw. $\zeta'_{-\mu}$) einer beliebigen Koeffizientenfolge, die zu einer formalen Lösung $\Sigma$ (bzw. $\Sigma'$) der Differentialgleichung (L) gehört, die Beziehungen

$$\zeta_\nu = [A, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \ldots, \tilde{\zeta}_n]_\alpha \qquad \text{für alle} \quad \nu \geqq n,$$

$$\zeta'_{-\mu} = [B, \tilde{\zeta}'_{-1}, \tilde{\zeta}'_{-2}, \ldots, \tilde{\zeta}'_{-m}]_\beta \qquad \text{für alle} \quad \mu \geqq m.$$

Andererseits ist umgekehrt wegen (57) und (62) auch

$$[A, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \ldots, \tilde{\zeta}_n]_\alpha = [A, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]_\alpha,$$

$$[B, \tilde{\zeta}'_{-1}, \tilde{\zeta}'_{-2}, \ldots, \tilde{\zeta}'_{-m}]_\beta = [B, \zeta'_{-1}, \zeta'_{-2}, \ldots, \zeta'_{-m}]_\beta,$$

und somit ist auch

(67) $$\zeta_\nu = [A, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]_\alpha \qquad \text{für alle} \quad \nu \geqq n,$$

(68) $$\zeta'_{-\mu} = [B, \zeta'_{-1}, \zeta'_{-2}, \ldots, \zeta'_{-m}]_\beta \qquad \text{für alle} \quad \mu \geqq m.$$

Das heißt aber in Worten: *Im Laplaceschen Falle sind in jeder Koeffizientenfolge $\zeta_\nu$, die zu einer formalen Lösung $\Sigma$ der Differentialgleichun* (L) *gehört, nur endlich viele, etwa die $n+1$ ersten Koeffizienten $A, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ linear unabhängig, während alle übrigen $\zeta_\nu$ mit einem Index $\nu \geqq n+1$ homogene lineare Verbindungen dieser $n+1$ ersten Koeffizienten sind.* Diese Bedingung ist nun aber, wie sich beweisen läßt, nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für den Laplaceschen Fall; ja es zeigt sich sogar, daß, wenn die Beziehungen (67) nur für ein einziges $\nu \geqq n+1$ bestehen, man bereits schließen kann, daß die vorgelegte Differentialgleichung vom Laplaceschen Typus ist.

Entsprechendes gilt für jede zu einer formalen Lösung $\Sigma'$ gehörige Koeffizientenfolge $\zeta'_{-\mu}$. Die Bedingungen (67) und (68) sind somit alle notwendig im Laplaceschen Fall erfüllt.

*Ist umgekehrt die Differentialgleichung* (L) *nicht vom Laplaceschen Typus, so besteht keine einzige der Beziehungen* (67) *und* (68) *für irgendein* $\nu \geqq n+1$ *oder irgendein* $\mu \geqq m+1$.

**35.** Im folgenden Paragraphen soll versucht werden, die durch Formel (44) des § 7 definierte Funktion $H^*(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$ in eine konvergente Reihe $\Sigma'$ zu entwickeln, die im ganzen Bereich

$$0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0 \leqq \pi, \qquad |\beta - \beta_0| \leqq \delta$$

konvergiert. Da aber die Koeffizienten von $L(\zeta)$ für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ nicht mehr regulär sind, ist bei der Integration an Stelle der Differentialgleichung (L) das System von Differentialgleichungen (L*) zugrunde zu legen. Nun läßt sich aber das in § 8 geschilderte Verfahren auch auf die Integration des Systems (L*) ausdehnen. Man setze

$$\Sigma_1 \sim \chi_0(\alpha)\frac{d\varphi_0(\alpha)}{d\alpha} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\xi_\nu(\alpha\beta)\varphi_\nu(\alpha),$$

$$\Sigma_2 \sim \sum_{\nu=0}^{\infty}\eta_\nu(\alpha\beta)\varphi_\nu(\alpha),$$

wobei die $\varphi_\nu(\alpha)$ wieder den Beziehungen (52) genügen. Dann sind die Reihen $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ ein formales Lösungspaar des Systems (L*), wenn ihre Koeffizienten $\xi_\nu(\alpha\beta)$, $\eta_\nu(\alpha\beta)$ durch die Rekursionsformeln

$$(69)\qquad \begin{cases} \eta_0(\alpha\beta) = \chi_0(\alpha)\dfrac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}, \\ \xi_\nu(\alpha\beta) = \chi_{\nu+1}'(\alpha) + \displaystyle\int_{\beta_0}^{\beta}\frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\eta_\nu(\alpha\tau)\,d\tau, \\ \eta_{\nu+1}(\alpha\beta) = \dfrac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}\xi_\nu(\alpha\beta) \qquad \dfrac{\partial\eta_\nu(\alpha\beta)}{\partial\alpha} \end{cases}$$

bestimmt sind.

Sind $\xi_\nu(\alpha\beta)$, $\eta_\nu(\alpha\beta)$ und $\xi_\nu^*(\alpha\beta)$, $\eta_\nu^*(\alpha\beta)$ zwei verschiedene Koeffizientenfolgen, die aber beide zu formalen Lösungen $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ bzw. $\Sigma_1^*$, $\Sigma_2^*$ gehören, so besteht zwischen den $\xi_\nu$ und $\xi_\nu^*$ bzw. $\eta_\nu$ und $\eta_\nu^*$ ein Zusammenhang, der sich in den Formeln

$$(70)\qquad \begin{cases} \xi_\nu^* = [1, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\nu]_\alpha, \\ \eta_\nu^* = [\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_\nu]_\alpha \end{cases}$$

ausdrücken läßt.

Konstruiert man sich die Koeffizientenfolgen (69), indem man wieder $\chi_0 = 1$, $\chi_\nu = 0$ für alle $\nu \geqq 1$ setzt, d. h.

$$\mathring{\eta}_0(\alpha\beta) = \frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)},$$

$$\mathring{\xi}_0(\alpha\beta) = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)} \mathring{\eta}_\nu(\alpha\tau; \beta_0)\, d\tau,$$

$$\mathring{\eta}_{\nu+1}(\alpha\beta; \beta_0) = \frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)} \mathring{\xi}_\nu(\alpha\beta; \beta_0) - \frac{\partial \mathring{\eta}_\nu(\alpha\beta; \beta_0)}{\partial\alpha},$$

so läßt sich zeigen, daß auch die zu den Koeffizientenfolgen $\mathring{\xi}_\nu$, $\mathring{\eta}_\nu$ gehörigen Reihen

$$(71) \qquad \begin{cases} \mathring{\Sigma}_1 = \dfrac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathring{\xi}_\nu(\alpha\beta; \beta_0)\, \mathring{\varphi}_\nu(\alpha; \alpha_0), \\ \mathring{\Sigma}_2 = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathring{\eta}_\nu(\alpha\beta; \beta_0)\, \mathring{\varphi}_\nu(\alpha; \alpha_0) \end{cases}$$

konvergieren und eine Lösung des Systems (L*) liefern, wofern nur $|\alpha - \alpha_0|$ hinreichend klein ist. Hierbei sind wieder unter $\mathring{\varphi}_\nu(\alpha; \alpha_0)$ die Funktionen der Formel (58) verstanden. Durch die Reihen (71) lassen sich alle Lösungspaare des Systems (L*) darstellen, die der Randbedingung

$$\eta(\alpha_0, \beta) = \text{konst.} \frac{A_\beta(\alpha_0, \beta)}{B(\alpha_0, \beta)}$$

genügen. Die Funktion $\varphi(\alpha)$ ist dann durch die Beziehungen

$$\xi(\alpha\beta_0) = \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}, \qquad \eta(\alpha_0, \beta) = \varphi(\alpha_0) \frac{A_\beta(\alpha_0, \beta)}{B(\alpha_0, \beta)}$$

eindeutig bestimmt.

**36.** Entsprechend erhält man formale Lösung des Systems (L*), wenn man die Reihen

$$\Sigma_1' \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi'_{-\nu}(\alpha\beta)\, \psi_\nu(\beta)$$

$$\Sigma_2' \sim \chi_0^*(\beta) \frac{d\psi_0(\beta)}{d\beta} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta'_{-\nu}(\alpha\beta)\, \psi_\nu(\beta)$$

bildet, wobei die $\psi_\nu(\beta)$ den Beziehungen (60) genügen und für die $\xi'_{-\nu}$ und $\eta'_{-\nu}$ die Rekursionsformeln

$$\xi'_0(\alpha\beta) = \chi_0^*(\beta) \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)},$$

$$\eta'_{-\nu}(\alpha\beta) = \chi_{-\nu-1}(\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{A_\beta(\sigma\beta)}{B(\sigma\beta)} \xi'_{-\nu}(\sigma\beta)\, d\sigma,$$

$$\xi'_{-\nu-1}(\alpha\beta) = \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)} \eta'_{-\nu}(\alpha\beta) - \frac{\partial \xi'_{-\nu}(\alpha\beta)}{\partial\alpha}$$

gelten.

Sind $\xi'_{-\nu}, \eta'_{-\nu}$ und $\xi'^{*}_{-\nu}, \eta'^{*}_{-\nu}$ zwei verschiedene Koeffizientenfolgen, die beide zu verschiedenen formalen Lösungen $\Sigma'_1, \Sigma'_2$ bzw. $\Sigma'^{*}_1, \Sigma'^{*}_2$ von $(L^*)$ gehören, so hängen die $\xi'^{*}_{-\nu}, \eta'^{*}_{-\nu}$ mit den $\xi'_{-\nu}, \eta'_{-\nu}$ durch die Formeln

$$(72) \qquad \begin{cases} \xi'^{*}_{-\nu} = [\xi'_0, \xi'_{-1}, \ldots, \xi'_{-\nu}]_\beta \\ \eta'^{*}_{-\nu} = [1, \eta'_0, \eta'_{-1}, \ldots, \eta'_{-\nu}]_\beta \end{cases}$$

zusammen.

Bildet man die spezielle Koeffizientenfolge mit $\chi_0^* = 1$, $\chi_{-\nu} = 0$ für alle $\nu \geqq 1$, d. h.

$$\mathring{\xi}'_0(\alpha\beta) = \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)},$$

$$\mathring{\eta}'_{-\nu}(\alpha\beta;\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{A_\beta(\sigma\beta)}{B(\sigma\beta)}\, \mathring{\xi}'_{-\nu}(\sigma\beta;\alpha_0)\, d\sigma,$$

$$\mathring{\xi}'_{-\nu-1}(\alpha\beta;\alpha_0) = \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\, \mathring{\eta}'_{-\nu}(\alpha\beta;\alpha_0) - \frac{\partial \mathring{\xi}'_{-\nu}(\alpha\beta;\alpha_0)}{\partial\alpha},$$

so sind die beiden zugehörigen Reihen

$$(73) \qquad \begin{cases} \mathring{\Sigma}'_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathring{\xi}'_{-\nu}(\alpha\beta;\alpha_0)\, \mathring{\psi}_\nu(\beta;\beta_0), \\ \mathring{\Sigma}'_2 = \frac{d\psi(\beta)}{d\beta} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathring{\eta}'_{-\nu}(\alpha\beta;\alpha_0)\, \mathring{\psi}_\nu(\beta;\beta_0), \end{cases}$$

unter $\mathring{\psi}_\nu(\beta;\beta_0)$ die Funktionen der Formeln (63) verstanden, konvergent und liefern eine Lösung des Systems $(L^*)$, wofern nur $|\beta - \beta_0|$ hinreichend klein ist. Außerdem läßt sich durch die Reihen (73) jede Lösung von $(L^*)$ darstellen, deren Randwerte

$$\xi(\alpha\beta_0) = \text{konst.}\, \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta_0)}$$

sind. Die Funktion $\psi(\beta)$ ist dann durch die Beziehungen

$$(74) \qquad \eta(\alpha_0\beta) = \frac{d\psi(\beta)}{d\beta}, \qquad \xi(\alpha\beta_0) = \psi(\beta_0)\frac{B_\alpha(\alpha\beta_0)}{A(\alpha\beta_0)}$$

eindeutig bestimmt.

**37.** Es läßt sich weiter zeigen, daß dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung (L) vom Laplaceschen Typus ist, unter den Koeffizientenfolgen $\xi_\nu, \eta_\nu$; $\xi'_{-\nu}, \eta'_{-\nu}$, welche zu dem (L) zugeordneten System $(L^*)$ gehören, endliche Folgen existieren; d. h. aber, daß dann und nur dann das System $(L^*)$ Integrale besitzt, die sich durch endliche Summen darstellen lassen:

$$\tilde{\Sigma}_1 = \frac{d\varphi_0(\alpha)}{d\alpha} + \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\xi}_\nu(\alpha\beta)\,\varphi_\nu(\alpha),$$

$$\tilde{\Sigma}_2 = \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\eta}_\nu(\alpha\beta)\,\varphi_\nu(\alpha),$$

$$\tilde{\Sigma}_1' = \sum_{\mu=0}^{m} \tilde{\xi}'_{-\mu}(\alpha\beta)\,\psi_\mu(\beta),$$

$$\tilde{\Sigma}_2' = \frac{d\psi_0(\beta)}{d\beta} + \sum_{\mu=0}^{m} \tilde{\eta}'_{-\mu}(\alpha\beta)\,\psi_\mu(\beta).$$

Wir nennen in diesem Falle auch (L*) ein System vom Laplaceschen Typus. Man findet schließlich, indem man die Beziehungen (70) bzw. (72) heranzieht, den wichtigen Satz:

*Im Laplaceschen Falle gelten für alle zu formalen Lösungen $\Sigma_1, \Sigma_2$ des Systems* (L*) *gehörigen Koeffizientenfolgen $\xi_\nu, \eta_\nu$ die Beziehungen*

$$(75) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_\nu = [1, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]_\alpha \\ \eta_\nu = [\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n]_\alpha \end{array} \right\} \quad \text{für alle} \quad \nu \geqq n$$

*und entsprechend für die Folgen $\xi'_{-\mu}, \eta'_{-\mu}$*

$$(76) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_{-\mu} = [\xi'_0, \xi'_{-1}, \ldots, \xi'_{-m}]_\beta \\ \eta'_{-\mu} = [1, \eta'_0, \eta'_{-1}, \ldots, \eta'_{-m}]_\beta \end{array} \right\} \quad \text{für alle} \quad \mu \geqq m.$$

Dieser Satz ist auch umkehrbar:

*Ist für ein einziges $\nu \geqq n+1$*

$$\eta_\nu = [\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n]_\alpha$$

*oder aber für ein einziges $\mu \geqq m+1$*

$$\xi'_{-\mu} = [\xi'_0, \xi'_{-1}, \ldots, \xi'_{-m}]_\beta,$$

*so ist das System* (L*) *vom Laplaceschen Typus.*

## § 10.

## Umformung der Bedingung des § 7.

**38.** Für die Ausführungen des § 10 werden die Voraussetzungen des § 1, die den Untersuchungen der §§ 1 bis 7 zugrunde gelegt sind, erweitert. Es werden nämlich nunmehr die Funktionen $u, v, w$ statt nur dreimal stetig differentiierbar im ganzen Bereich

$$(77) \qquad 0 \leqq \alpha \leqq \pi, \qquad -\infty < \beta < +\infty$$

regulär analytisch in $\alpha$ und $\beta$ vorausgesetzt. Und ebenso mögen auch die im § 1 in den Formeln (2) und (3) eingeführten Funktionen $\vartheta(\beta)$, $\psi(\beta)$,

$\Omega_1(\alpha\beta)$, $\Omega_2(\alpha\beta)$ analytische Funktionen sein, so daß die Koeffizienten $\frac{B_\alpha}{A}$, $\frac{A_\beta}{B}$ des Systems von Differentialgleichungen (L*) im ganzen Bereich (77) analytisch sind. Dann lassen sich aber die Integrale des Systems (L*) in die in den §§ 8 und 9 beschriebenen Reihen entwickeln.

Es seien $\xi(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$, $\eta(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$ die in den Formeln (46) § 7 definierten Funktionen, deren Randwerte nach (47) durch die Gleichungen

$$\xi(\alpha\beta_0;\alpha_0\beta_0)=\frac{B_\alpha(\alpha\beta_0)}{A(\alpha\beta_0)},\qquad \eta(\alpha_0\beta;\alpha_0\beta_0)=0$$

gegeben sind. Nach den Ausführungen des Abschnitts **36**, § 9 lassen sich nun aber $\xi$ und $\eta$ durch Reihen $\overset{\circ}{\Sigma}{}'_1$ und $\overset{\circ}{\Sigma}{}'_2$ darstellen, wobei nach Formel (74) $\psi(\beta)=1$ zu setzen ist. Man erhält mithin nach (73)

$$\xi(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)=\frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\overset{\circ}{\xi}{}'_{-\mu}(\alpha\beta;\alpha_0)\frac{(\beta-\beta_0)^\mu}{\mu!},$$

$$\eta(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\overset{\circ}{\eta}{}'_{-\mu}(\alpha\beta;\alpha_0)\frac{(\beta-\beta_0)^\mu}{\mu!},$$

und zwar konvergieren diese beiden Reihen für $0\leqq\alpha\leqq\pi$, $|\beta-\beta_0|\leqq\delta$.

Aus Formel (49) des § 7 ergibt sich nun für $H^*(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$ die Darstellung

$$H^*(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)=B(\alpha\beta)+\sum_{\mu=1}^{\infty}\hat{\xi}_{-\mu}(\alpha\beta;\alpha_0)\frac{(\beta-\beta_0)^\mu}{\mu!},\tag{78}$$

wo

$$\hat{\xi}_{-\mu}(\alpha\beta;\alpha_0)=\int_0^\alpha\overset{\circ}{\xi}{}'_{-\mu}(\sigma\beta;\alpha_0)A(\sigma\beta)\,d\sigma\tag{79}$$

gesetzt ist.

**39.** Die Reihe (78) für $H^*$ benutzen wir nunmehr, um die Bedingung (50) umzuformen; und zwar erhält man für $|\beta-\beta_0|\leqq\delta$

$$\int_0^\pi\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}H^*(\sigma\beta_0;\pi\beta)\,d\sigma$$

$$=\int_0^\pi B(\sigma\beta_0)\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}\,d\sigma+\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(\beta_0-\beta)^\mu}{\mu!}\int_0^\pi\hat{\xi}_{-\mu}(\sigma\beta_0;\pi)\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}\,d\sigma=0$$

identisch in $\beta$. Hieraus ergeben sich unendlich viele Integralbedingungen für die Werte von $\frac{\partial R_1}{\partial\sigma}$ längs des Meridians $\beta=\beta_0$. Es muß nämlich sein:

$$\boxed{\int_0^\pi B(\sigma\beta_0)\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}\,d\sigma=0,\quad \int_0^\pi\hat{\xi}_{-\mu}(\sigma\beta_0;\pi)\frac{\partial R_1}{\partial\sigma}(\sigma\beta_0)=0\quad\text{für alle }\mu\geqq1.}\tag{80}$$

Die Gleichungen (80) liefern uns die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, daß die Bildfläche $\mathfrak{F}$ auch für $\alpha = \pi$ (dem Bilde des Punktes $N$ der Kugel) einen Nabel hat.

**40.** Es fragt sich nun weiter, ob die unendlich vielen Bedingungen (80) wirklich voneinander verschieden sind, oder ob nicht etwa, wenn die Beziehungen (80) für die ersten $m$ Indizes $\mu$ bestehen, diese Bedingungen für $\mu \geqq m+1$ von selbst erfüllt sind. Die Antwort auf diese Frage geben die Ausführungen des Abschnittes **37**, § 9 über den Laplaceschen Fall. Aus Formel (76) folgt nämlich im Laplaceschen Fall zunächst

$$\mathring{\xi}'_{-\mu}(\alpha\beta;\pi) = \left[\frac{B_\alpha}{A}, \mathring{\xi}'_{-1}, \ldots, \mathring{\xi}'_{-m}\right]_\beta \quad \text{für alle} \quad \mu \geqq m+1$$

und dann weiter wegen Formel (79) auch

$$\hat{\xi}_{-\mu}(\alpha\beta;\pi) = [B, \hat{\xi}_{-1}, \ldots, \hat{\xi}_{-m}]_\beta \quad \text{für alle} \quad \mu \geqq m+1, \tag{81}$$

d. h. aber, die Bedingungen (80) sind für $\mu \geqq m+1$ von selbst erfüllt und nur die Bedingungen für $\mu = 1, 2, \ldots, m$ sind untereinander verschieden. Andererseits ist nach einer Bemerkung zum Schluß des Abschnitts **37**, wenn der Laplacesche Fall nicht vorliegt, die Beziehung (81) für kein einziges $\mu \geqq m+1$ erfüllt, und d. h.: die Beziehungen (80) sind jetzt sämtlich untereinander verschieden.

*Mithin reduzieren sich die Gleichungen* (80) *nur im Laplaceschen Falle auf endlich viele Bedingungen, während in jedem anderen Falle die Werte von* $R_1$ *auf dem festen Meridian* $\beta = \beta_0$ *unendlich vielen Bedingungen genügen müssen.*

## Kapitel III.

## Sphärische Abbildung in speziellen Fällen.

### § 11.

### Sphärische Abbildung im Laplaceschen Falle.

**41.** In diesem Kapitel soll das Problem der sphärischen Abbildung in einigen wichtigen speziellen Fällen vollständig gelöst werden, in welchem die Periodizitätsforderung von selbst erfüllt ist und auf keine tiefer liegenden Betrachtungen führt.

Wir beginnen mit der Untersuchung von Problemen vom Laplaceschen Typus[13]), über die wir bereits in Abschnitt **40**, § 10 ein wichtiges Resultat

[13]) Im Laplaceschen Falle muß das vorgegebene Kurvensystem $\mathfrak{S}$ nicht notwendig analytisch sein, sondern es genügt vorauszusetzen, daß die Funktionen $\frac{A_\beta}{A}$ und $\frac{B_\alpha}{B}$ beide $k+1$-mal nach $\alpha$ und $\beta$ stetig differentiierbar ist. Hierbei bezeichnet $k$ die größere der beiden in Abschnitt **32**, § 9 eingeführten Zahlen $n$ und $m$.

abgeleitet haben. Damit im Laplaceschen Fall die Bildfläche $\mathfrak{F}$ für $\alpha = \pi$ einen Nabel hat, ist nach den Ausführungen in Abschnitt **40** hinreichend und notwendig, daß die Werte von $\frac{\partial R_1}{\partial \alpha}$ auf dem Meridian $\beta = \beta_0$ den $m+1$ Bedingungen

$$(82)\quad \int_0^{\pi} B(\sigma\beta_0)\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}\,d\sigma = 0, \qquad \int_0^{\pi} \hat{\zeta}_{-\mu}(\sigma\beta_0;\pi)\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}\,d\sigma = 0$$

$$\text{für } \mu = 1, 2, \ldots, m$$

genügen. Aus der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme folgt unmittelbar, daß unendlich viele voneinander linear unabhängige Funktionen von $\sigma$ existieren, die, für $\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}$ eingesetzt, die Gleichungen (80) erfüllen. Die Formeln (42) des § 6 liefern die Funktionen $R_1(\alpha\beta)$, $R_2(\alpha\beta)$ auf der ganzen Einheitskugel, die durch die Werte von $\frac{\partial R_1}{\partial\alpha}$ auf dem Meridian $\beta = \beta_0$ und den Wert $R_0$ des Krümmungsradius im Nabelpunkt $\alpha = 0$ eindeutig bestimmt sind. Hierbei werde $R_0$ groß genug gewählt, damit die Funktionen $R_1$ und $R_2$ überall positiv werden und somit die Bildfläche $\mathfrak{F}$ konvex wird.

**42.** Den zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Vektor $\mathfrak{x}$ erhält man aus Formel (29) § 4

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \int_0^{\alpha} R_1(\sigma\beta)\,\mathfrak{u}_\sigma(\sigma\beta)\,d\sigma.$$

Wir wollen nunmehr zeigen, daß im Laplaceschen Fall die Periodizitätsforderung

$$(83)\qquad \mathfrak{x}(\alpha, \beta + 2\pi) = \mathfrak{x}(\alpha\beta)$$

von selbst erfüllt ist. Da nach Voraussetzung

$$\mathfrak{u}_\alpha(\alpha, \beta + 2\pi) = \mathfrak{u}_\alpha(\alpha\beta),$$

so ist die Forderung (83) mit der Behauptung

$$(84)\qquad R_1(\alpha, \beta + 2\pi) = R_1(\alpha\beta)$$

äquivalent.

Um (84) zu beweisen, gehe man von der Darstellung (42) des § 6 aus. Man bemerkt unmittelbar, daß die Gleichung (84) aus der Beziehung

$$(85)\qquad G(\sigma\beta_0; \alpha, \beta + 2\pi) = G(\sigma\beta_0; \alpha\beta)$$

folgen würde. Nun ist aber nach dem Eindeutigkeitssatze des Randwertproblems offenbar

$$G(\sigma\beta_0; \alpha, \beta + 2\pi) = G(\sigma, \beta_0 - 2\pi; \alpha\beta).$$

Mithin bleibt nur noch übrig, an Stelle von (85) die Beziehung

$$G(\sigma, \beta_0 - 2\pi; \alpha\beta) = G(\sigma\beta_0; \alpha\beta)$$

zu beweisen, oder aber indem man die Bezeichnung der vier Veränderlichen passend abändert:

$$G(\alpha, \beta + 2\pi; \alpha_0\beta_0) = G(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0). \tag{86}$$

Aus (86) folgt dann (84) und schließlich die Periodizitätsforderung (83).

**43.** Zum Beweise von (86) gehe man von der bereits bekannten Tatsache aus, daß im Laplaceschen Fall der Ausdruck [14])

$$\zeta(\alpha\beta) = B(\alpha\beta)\frac{1}{h(\alpha\beta)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{h_1(\alpha\beta)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cdots\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{h_{n-1}(\alpha\beta)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}h(\alpha\beta)h_1(\alpha\beta)\ldots h_{n-1}(\alpha\beta)\,\Phi(\alpha)\right) \tag{87}$$

für jede beliebige $n+1$-mal stetig differentiierbare Funktion $\Phi(\alpha)$ ein Integral der Differentialgleichung (L) ist. Hierbei bezeichnen die Funktionen $h, h_1, h_2, \ldots$ die „Laplaceschen Invarianten", die aus den Rekursionsformeln

$$\begin{cases} h = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A_\beta}{A}\right) + \frac{A_\beta}{A}\frac{B_\alpha}{B}, & h_{-1} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B_\alpha}{B}\right) + \frac{A_\beta}{A}\frac{B_\alpha}{B}, \\ h_1 = 2h - h_{-1} - \frac{\partial^2 \log h}{\partial\alpha\,\partial\beta}, & h_\nu = 2h_{\nu-1} - h_{\nu-2} - \frac{\partial^2 \log h_{\nu-1}}{\partial\alpha\,\partial\beta} \end{cases} \tag{88}$$

gewonnen werden. Der Laplacesche Fall ist nun dadurch definiert, daß die Folge der Laplaceschen Invarianten abbricht, indem etwa $h_n = 0$ wird. Man beachte übrigens, daß die Funktionen $h, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ keineswegs an allen Stellen des Bereiches

$$0 \leqq \alpha \leqq \pi, \quad -\infty < \beta < +\infty \tag{89}$$

regulär sind, sondern aus (88) folgt, daß an einer Stelle, an der $h_{\nu-1}$ verschwindet, $h_\nu$ singulär wird. Es genügt aber zunächst, den Ausdruck (87) für $\zeta$ nur in solchen Stellen $\alpha, \beta$ zu betrachten, in denen alle Funktionen $h, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ regulär sind.

Man setze nunmehr in (87)

$$\Phi(\alpha) = \mathring{\varphi}_n(\alpha; \alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{(\alpha-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

und führe dort die $n$ Differentiationen nach $\alpha$ aus. Dann wird man auf eine Darstellung von $\zeta$ durch endliche Summen der Form (65) des § 9 geführt. Man erhält nämlich auf diese Weise für den Ausdruck (87)

$$\zeta(\alpha\beta) = A(\alpha\beta)\,\varphi(\alpha) + \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\zeta}_\nu(\alpha\beta)\,\mathring{\varphi}_\nu(\alpha; \alpha_0), \tag{90}$$

[14]) Vgl. Darboux, loc. cit. Fußnote [2]), 2, 2. Aufl., S. 29—31 und 37—38.

unter den $\mathring{\varphi}_\nu(\alpha;\alpha_0)$ die Funktionen der Formeln (58) aus § 8 verstanden. Hierbei müssen nun aber nach den Ausführungen der §§ 8 und 9 die $\tilde{\zeta}_\nu(\alpha\beta)$ auch den Rekursionsformeln (55) genügen, und somit ergibt sich aus (90), daß $\zeta(\alpha\beta)$ in allen Punkten des Bereiches (89) regulär ist, auch da, wo einige der Funktionen $h, h_1, \ldots, h_{n-1}$ singulär werden.

In der Form (87) bzw. (90) sind alle Integrale $\zeta(\alpha\beta)$ der Differentialgleichung (L) enthalten, die der Randbedingung

$$\zeta(\alpha_0,\beta) = \text{konst.}\, A(\alpha_0,\beta) \tag{91}$$

genügen, und zwar bestimmt man die noch verfügbare Funktion $\varphi(\alpha)$ durch die Werte von $\zeta(\alpha\beta)$ für $\beta=\beta_0$. Aus (90) folgt nämlich, wenn man für die $\mathring{\varphi}_\nu(\alpha;\alpha_0)$ ihre Werte aus (58) einsetzt und Integration und Summation miteinander vertauscht,

$$\zeta(\alpha\beta_0) = A(\alpha\beta_0)\,\varphi(\alpha) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\xi}_\nu(\alpha\beta_0)\,\frac{(\alpha-\sigma)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma;$$

diese Beziehung liefert eine reguläre Volterrasche Integralgleichung, aus der sich wegen $A(\alpha\beta_0)>0$ die Funktion $\varphi(\alpha)$ eindeutig bestimmen läßt.

Wegen (31) und (33) genügen aber die beiden Funktionen $G(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$ und $p(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0)$ gerade der Randbedingung (91) und lassen sich mithin beide durch Reihen der Art (90) darstellen. Nun läßt sich aber leicht zeigen, daß die Funktionen $\tilde{\xi}_\nu(\alpha\beta)$ sämtlich periodisch in $\beta$ sind. Denn aus den Rekursionsformeln (88) folgt die Periodizität der $n$ Funktionen $h, h_1, \ldots, h_{n-1}$ unmittelbar und die $\zeta_\nu(\alpha\beta)$ lassen sich ihrerseits aus dem Ausdruck (87) berechnen, indem man die $n$ Differentiationen nach $\alpha$ ausführt [15]). Mithin sind alle Integrale $\zeta$ der Differentialgleichung (L), die sich durch eine Reihe der Form (90) darstellen lassen, periodisch und es gelten somit für die Funktionen $G$ und $p$ die Beziehungen

$$G(\alpha,\beta+2\pi;\alpha_0\beta_0) = G(\alpha,\beta;\alpha_0\beta_0),\quad p(\alpha,\beta+2\pi;\alpha_0\beta_0) = p(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0).$$

Aus Formel (32) des § 5

$$H = 1 + p - G$$

folgt außerdem noch

$$H(\alpha,\beta+2\pi;\alpha_0\beta_0) = H(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0).$$

Damit ist aber bewiesen, daß im Laplaceschen Fall alle Funktionen $\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}$, welche den $m+1$ Bedingungen (82) genügen, auf geschlossene konvexe Flächen $\mathfrak{F}$ führen, die Lösungen des gestellten Problems sind, und nach einer Bemerkung zu Beginn dieses Paragraphen existieren somit unendlich viele voneinander linear unabhängige Bildflächen $\mathfrak{F}$.

---

[15]) Für die Ausnahmepunkte, in denen einige der Funktionen $h, h_1, \ldots, h_{n-1}$ singulär sind, folgt die Periodizität der $\tilde{\xi}_\nu(\alpha\beta)$ aus Stetigkeitsgründen.

## § 12.

## Konvexe Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien.

**44.** Die Schar geschlossener Kurven $\alpha =$ konst. des auf der Einheitskugel vorgegebenen Kurvensystems $\mathfrak{S}$ mögen sich nur aus Kreisen zusammensetzen. Dann enthält diese Kreisschar, wie man sich leicht geometrisch klarmacht, genau einen größten Kugelkreis, etwa die Kurve $\alpha = \alpha_1$.

Es bezeichne ferner $\mathfrak{a}(\alpha)$ den Vektor, der sich vom Kugelmittelpunkte nach der Spitze des die Kugel im Kreise $\alpha =$ konst. berührenden Tangentialkegels erstreckt; $\mathfrak{a}(\alpha)$ ist für alle Werte der (an einer Seite offenen) Intervalle

$$0 \leqq \alpha < \alpha_1, \qquad \alpha_1 < \alpha \leqq \pi$$

definiert, während $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_1} \mathfrak{a}(\alpha)$ über alle Grenzen wächst. Außerdem sei $|r(\alpha)|$ gleich der Entfernung der Spitze des Tangentialkegels vom Berührungspunkte der den Kegel erzeugenden Kugeltangente, und es sei endlich

$$r(\alpha) > 0 \text{ für } 0 < \alpha < \alpha_1, \qquad r(\alpha) < 0 \text{ für } \alpha_1 < \alpha < \pi,$$
$$r(0) = r(\pi) = 0, \qquad \lim_{\alpha \to \alpha_1} r(\alpha) \to \infty.$$

Dann ist für alle $\alpha \neq \alpha_1$

$$\mathfrak{u}(\alpha\beta) = \mathfrak{a}(\alpha) + r(\alpha) \frac{\mathfrak{u}_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}. \tag{92}$$

Die Differentiation nach $\beta$ ergibt

$$\mathfrak{u}_\beta = \frac{r}{A} \mathfrak{u}_{\alpha\beta} - \frac{r A_\beta}{A^2} \mathfrak{u}_\alpha$$

oder

$$\mathfrak{u}_{\alpha\beta} = \frac{A_\beta}{A} \mathfrak{u}_\alpha + \frac{A}{r} \mathfrak{u}_\beta.$$

Vergleicht man diese Relation mit der Differentialgleichung (L), der die drei Komponenten $u$, $v$, $w$ von $\mathfrak{u}$ genügen müssen, so schließt man

$$\frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)} = \frac{A(\alpha\beta)}{r(\alpha)}, \tag{93}$$

und hieraus leitet man die beiden Beziehungen

$$\frac{A_\beta}{A} = \frac{B_{\alpha\beta}}{B_\alpha} - \frac{B_\beta}{B}, \tag{94}$$

$$B(\alpha\beta) = B(\alpha_1, \beta)\, e^{\int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{A(\sigma\beta)}{r(\sigma)} d\sigma} \tag{95}$$

ab.

Ist nunmehr $\psi(\beta)$ eine willkürliche einmal differentiierbare Funktion von $\beta$, so verifiziert man leicht, daß

$$\zeta(\alpha\beta) = \psi(\beta) B(\alpha\beta) \tag{96}$$

der Differentialgleichung (L) genügt, wobei in $L(\zeta)$ für den Koeffizienten $\overset{A_\beta}{A}$ sein Wert aus (94) eingesetzt ist.

**45.** Auf Grund von (96) gelingt es, explizite Formeln für die Greenschen Funktionen $G$ und $H$ anzugeben, und zwar ist

$$G(\alpha\beta;\ \alpha_0\beta_0) = 1 + \frac{B(\alpha\beta)}{B(\alpha_0\beta)}\left(\frac{A(\alpha_0\beta)}{A(\alpha_0\beta_0)} - 1\right), \tag{97}$$

$$\begin{cases} H(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0) = \dfrac{B(\alpha\beta)}{B(\alpha_0\beta)}, \\ H^*(\alpha\beta;\alpha_0\beta_0) = \dfrac{B(\alpha_0\beta_0)}{B(\alpha_0\beta)}\,B(\alpha\beta). \end{cases} \tag{98}$$

Somit ist nach Formel (50) des § 7 die einzige hinreichende und notwendige Bedingung für die Werte von $\frac{\partial R_1}{\partial \alpha}$ auf dem Meridian $\beta = \beta_0$

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial R_1(\alpha\beta_0)}{\partial\alpha}\,B(\alpha\beta_0)\,d\alpha = 0. \tag{99}$$

Setzt man

$$\mathsf{P}(\alpha\beta) = \int_0^{\alpha} \frac{\partial R_1(\sigma\beta)}{\partial\sigma}\,B(\sigma\beta)\,d\sigma = \int_0^{\alpha} (R_1(\alpha\beta) - R_1(\sigma\beta))\,B_\sigma(\sigma\beta)\,d\sigma,$$

so ergibt sich, indem man die Werte für $G$ und $H$ der Formeln (97) und (98) in die Ausdrücke (42) des § 6 einsetzt,

$$\begin{cases} R_1(\alpha\beta) = R_1(\alpha\beta_0) + \dfrac{\mathsf{P}(\alpha\beta_0)}{B(\alpha\beta_0)}\left(\dfrac{A(\alpha\beta_0)}{A(\alpha\beta)} - 1\right), \\ R_2(\alpha\beta) = R_1(\alpha\beta_0) - \dfrac{\mathsf{P}(\alpha\beta_0)}{B(\alpha\beta_0)}. \end{cases} \tag{100}$$

Diese Ausdrücke für $R_1$ und $R_2$ führen unter Benutzung von Formel (29) des § 4 unmittelbar zur Bildfläche $\mathfrak{F}$.

Aus (100) ersieht man, daß $R_2$ gar nicht von $\beta$ abhängt und somit längs der Krümmungslinie $\alpha =$ konst. einen festen Wert hat, daraus folgt aber, daß die Krümmungslinie eine sphärische Kurve ist, und da sie gleichzeitig nach Voraussetzung in einer Ebene liegt, so ist die Krümmungslinie $\alpha =$ konst. auf $\mathfrak{F}$ ein Kreis. Mithin ergibt sich, daß die Bildfläche $\mathfrak{F}$ als Einhüllende einer einparametrigen Kugelschar aufgefaßt werden kann.

Es bezeichne $\mathfrak{y}(\alpha)$ den Vektor, der sich vom Koordinatenanfangspunkt zum Mittelpunkt der Kugel dieser Schar erstreckt; dann hat man für den zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Vektor $\mathfrak{x}$ die Darstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(\alpha) + R_2(\alpha)\,\mathfrak{u}(\alpha\beta). \tag{101}$$

Bildet man die partielle Ableitung erster Ordnung von $\mathfrak{x}$ nach $\alpha$, indem man dabei die Formeln (92) und (93), außerdem die Beziehungen (6)

des § 1 und (18) des § 4 benutzt, so erhält man

$$\mathfrak{y}(\alpha) = \mathfrak{y}_0 - \int_0^{\alpha} \frac{d R_2(\sigma)}{d\sigma}\, \mathfrak{a}(\sigma)\, d\sigma, \tag{102}$$

unter $\mathfrak{a}(\sigma)$ den Vektor der Formel (92) verstanden. Daß der Integrand auf der rechten Seite von (102) auch für $\alpha = \alpha_1$ stetig ist, folgt aus den leicht zu beweisenden Formeln

$$\frac{d R_2(\alpha)}{d\alpha} = \frac{B_\alpha(\alpha\beta_0)}{B(\alpha\beta_0)} \frac{\mathsf{P}(\alpha\beta_0)}{B(\alpha\beta_0)} = \frac{A(\alpha\beta_0)}{r} \frac{\mathsf{P}(\alpha\beta_0)}{B(\alpha\beta_0)} \quad \text{(wegen (100) und (93))}, \tag{103}$$

$$\mathfrak{a}^2 = r^2 + 1.$$

Mithin existiert $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_1} \frac{\mathfrak{a}(\alpha)}{r(\alpha)}$ und es ist

$$\lim_{\alpha \to \alpha_1} \frac{d R_2(\alpha)}{d\alpha}\, \mathfrak{a}(\alpha) = A(\alpha_1, \beta_0) \frac{\mathsf{P}(\alpha_1, \beta_0)}{B(\alpha_1, \beta_0)} \lim_{\alpha \to \alpha_1} \frac{\mathfrak{a}(\alpha)}{r(\alpha)}.$$

**46.** Zusatz 1. Das Hauptresultat, daß $R_2$ von $\beta$ unabhängig ist, läßt sich auch direkt ableiten, ohne von den Darstellungen durch Greensche Funktionen Gebrauch zu machen. Man gehe von Formel (20) des § 4 aus, differentiiere $R_2$ nach $\beta$ und gehe dann zur Grenze $\alpha_0 \to 0$ über. Dann ergibt sich nach etwas Rechnung, indem man noch die Differentialgleichungen (18) des § 4 und Formel (94) heranzieht, unmittelbar

$$\frac{\partial R_2}{\partial \beta} = 0.$$

**47.** Zusatz 2. Die Formeln (100), (101) und (102) gelten auch noch unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen, als sie hier unter den Annahmen des § 1 bewiesen worden sind. Bezüglich des Verhaltens des vorgegebenen Kurvensystems $\mathfrak{S}$ [16]) in der Umgebung der beiden Pole $S$ und $N$ genügt es nämlich, die sämtlichen weitgehenden Voraussetzungen des Abschnittes **13**, § 1 durch die einfache Annahme zu ersetzen, daß $A(\alpha\beta)$ auch noch für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ von 0 verschieden und somit positiv ist. Ferner verzichten wir, um die allgemeinste Bildfläche mit stetigen Krümmungsradien und zwei Nabeln zu erhalten, darauf, die Existenz der beiden Grenzwerte $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\partial R_1(\alpha\beta_0)}{\partial \alpha}$ und $\lim\limits_{\alpha \to \pi} \frac{\partial R_1(\alpha\beta_0)}{\partial \alpha}$ zu fordern, und begnügen uns statt dessen mit der Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^{\pi} \frac{\partial R_1(\alpha\beta_0)}{\partial \alpha}\, d\alpha$. Außerdem erfülle $\frac{\partial R_1(\alpha\beta_0)}{\partial \alpha}$ die Bedingung (99).

Man bilde nunmehr zunächst die Ausdrücke (100) für $R_1$ und $R_2$, und überzeuge sich durch einfache Rechnung davon, daß sie dem System

[16]) Wie man sich leicht überlegt, ist das orthogonale Kurvensystem $\mathfrak{S}$ auf der Einheitskugel bereits durch den Vektor $\mathfrak{a}(\alpha)$ eindeutig bestimmt.

von Differentialgleichungen (18) des § 4 genügen; dann zeige man weiter, daß

$$(104)\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathsf{P}(\alpha\beta_0)}{B(\alpha\beta_0)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\int_0^{\alpha}(R_1(\alpha\beta_0)-R_1(\sigma\beta_0))B_\sigma(\sigma\beta_0)\,d\sigma}{B(\alpha\beta_0)}\to 0,\qquad \lim_{\alpha\to\pi}\frac{\mathsf{P}(\alpha\beta_0)}{B(\alpha\beta_0)}\to 0$$

ist. Beim Beweise des Grenzüberganges benutze man die Bemerkung, daß wegen (95) $B(\alpha\beta)$ bei festem $\beta$ als Funktion von $\alpha$ im Intervall $0\leqq\alpha\leqq\alpha_1$ monoton von 0 bis $B(\alpha_1,\beta)$ wächst und dann wieder im Intervall $\alpha_1\leqq\alpha\leqq\pi$ monoton von $B(\alpha_1,\beta)$ bis 0 abnimmt. Aus (104) folgt nun unmittelbar wegen (100)

$$\lim_{\alpha\to 0}R_1(\alpha\beta)=\lim_{\alpha\to 0}R_2(\alpha\beta)=R_1(0,\beta_0)=R_0,$$
$$\lim_{\alpha\to\pi}R_1(\alpha\beta)=\lim_{\alpha\to\pi}R_2(\alpha\beta)=R_1(\pi,\beta_0)=R_\pi.$$

Damit auch das Integral (102) existiert, kommt wegen (103) zu der Bedingung (99) für $\frac{\partial R_1(\alpha\beta_0)}{\partial\alpha}$ noch die weitere Forderung hinzu, daß das Integral

$$\int_0^{\pi}\frac{A(\alpha\beta_0)}{r(\alpha)}\,\frac{\mathsf{P}(\alpha\beta_0)}{B(\alpha\beta_0)}\,\mathfrak{a}(\alpha)\,d\alpha$$

zumindest als uneigentliches Integral existiert.

**48.** Das Ergebnis dieses Paragraphen läßt sich in den Satz zusammenfassen: *Die einzigen geschlossenen konvexen Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien sind die Einhüllenden einer einparametrigen Kugelschar.* Es sei hervorgehoben, daß dieser Satz bewiesen wurde, ohne die anderen zum Teil viel komplizierteren Flächen von Joachimsthal, Bonnet u. a.[17]) mit ebenen Krümmungslinien heranzuziehen.

---

[17]) An älteren Untersuchungen über Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien erwähnen wir:

O. Bonnet: Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques. Journ. de l'éc. polytechn. Cahier **35** (1853), p. 117–306.

E. Joachimsthal: Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes. Journ. für r. u. angew. Math. **54** (1857), S. 181–192.

V. Rouquet: Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un systeme sont planes. Thèse présentées à la faculté des sciences de Montpellier. Toulouse 1882.

Bonnet hat loc. cit. als erster das Problem, alle Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien zu konstruieren, vollständig auf analytischem Wege gelöst, während Joachimsthal, der seine Methode besonders kurz und übersichtlich darstellt, und Rouquet mehr elegante geometrische Lösungen desselben Problems angeben. Keiner der drei Autoren geht übrigens bei der Konstruktion der Flächen von dem sphärischen Bild ihrer Krümmungslinien aus, oder, was dasselbe ist, wird auf die Integration der partiellen Differentialgleichung (L) geführt.

Vgl. außerdem auch Darboux, loc. cit. Fußnote [2]) **1**, 2. Aufl., S. 165–170, 185–192; **4**, S. 198–216.

## § 13.

## Konvexe Flächen mit zwei Symmetrieebenen.

**49.** Bevor wir im nächsten Kapitel zur Untersuchung der Periodizitätsforderung übergehen, wollen wir uns hier zunächst vergewissern, daß auch geschlossene konvexe Flächen existieren, bei denen das spärliche Bild der Krümmungslinien nicht vom Laplaceschen Typus ist.

Zu diesem Zweck gehen wir von einem solchen Kurvensystem $\mathfrak{S}$ auf der Einheitskugel aus, welches zwei Symmetrieebenen besitzt. Die Ebene $w = 0$ (Äquatorebene) sei die eine Symmetrieebene und enthalte die geschlossene Kurve $\alpha = \frac{\pi}{2}$, die somit von einem größten Kugelkreis gebildet wird. In der zweiten Symmetrieebene, $v = 0$ (Meridianebene), seien die beiden Meridiankurven $\beta = 0$ und $\beta = \pi$ gelegen, die sich auch zu einem größten Kugelkreis zusammensetzen. Die Symmetrieeigenschaften der Ebenen $v = 0$ und $w = 0$ drücken sich in den Beziehungen aus:

$$u(\alpha, -\beta) = u(\alpha\beta), \quad v(\alpha, -\beta) = -v(\alpha\beta), \quad w(\alpha, -\beta) = w(\alpha\beta),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \beta\right) = u\left(\frac{\pi}{2} + \alpha, \beta\right), \quad v\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \beta\right) = v\left(\frac{\pi}{2} + \alpha, \beta\right),$$

$$w\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \beta\right) = -w\left(\frac{\pi}{2} + \alpha, \beta\right).$$

Das vorgelegte Kurvensystem $\mathfrak{S}$ ist somit durch sein Verhalten im vierten Teil der Kugel für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \beta \leqq \pi$ bereits bestimmt. Offenbar kann man $\mathfrak{S}$ dort so wählen, daß $\mathfrak{S}$ nicht dem Laplaceschen Typus angehört, indem man sich $\mathfrak{S}$ zunächst in einem Teil der Viertelskugel passend vorgibt und dann unter Beobachtung der Stetigkeitsforderungen $\mathfrak{S}$ auf der Viertelskugel so fortsetzt, daß die Randkurven der Viertelskugel Kurven des Systems werden. Das Verhalten von $\mathfrak{S}$ auf der genannten Kugel erhält man, indem man die Viertelskugel erst durch Spiegelung an der Ebene $v = 0$ zur Halbkugel und dann diese durch Spiegelung an der Ebene $w = 0$ zur Vollkugel ergänzt.

Nunmehr behaupten wir, das zu $\mathfrak{S}$ gehörige Problem der sphärischen Abbildung besitze eine Lösung, die sogar noch von einer willkürlichen Funktion abhängt. Zum Beweise suche man eine Bildfläche $\mathfrak{F}'$ des Kurvensystems $\mathfrak{S}$ zunächst nur im Bereich

$$0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \beta \leqq \pi \tag{105}$$

zu konstruieren; zu diesem Zwecke gebe man sich die Werte von $R_1$ auf dem Meridian $\beta = 0$ für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ derart vor, daß sie nur der einen Bedingung $\frac{\partial R_1\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\partial \alpha} = 0$ genügen, und berechne die Funktionen $R_1$ und $R_2$

im Bereiche (105) mit Hilfe der Formeln (42) des § 6. Schließlich erhält man den Vektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{F}'$ aus der Formel (29) des § 4.

Da $\mathfrak{S}$ das sphärische Bild von $\mathfrak{F}'$ ist, so müssen die Randkurven des konstruierten Flächenstückes $\mathfrak{F}'$, das sind die Kurven von $\beta = 0$, $\beta = \pi$ einerseits und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ anderseits in zwei Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ (Meridianebene und Äquatorebene) liegen, die den entsprechenden Ebenen $v = 0$ und $w = 0$ von $\mathfrak{S}$ parallel sind. Ebenso wie man das System $\mathfrak{S}$ auf der Vollkugel durch zwei Spiegelungen an den Ebenen $v = 0$ und $w = 0$ aus der Viertelskugel erhält, ergänzt man das bisher konstruierte Flächenstück $\mathfrak{F}'$ zur geschlossenen konvexen Vollfläche $\mathfrak{F}$, indem man $\mathfrak{F}'$ erst an der Ebene $\mathfrak{E}_1$ und dann an der Ebene $\mathfrak{E}_2$ spiegelt. $\mathfrak{F}$ ist dann, wie man leicht einsieht, eine Lösung des gestellten Problems. Es sei noch hervorgehoben, daß $\mathfrak{F}$ von der willkürlich gewählten Funktion $\frac{\partial R_1}{\partial \alpha}$ für $\beta = 0$ im Intervall $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ abhängt. Damit ist die Existenz von Flächen nachgewiesen, bei denen das sphärische Bild der Krümmungslinien nicht vom Laplaceschen Typus ist.

**50.** Die im vorigen Abschnitt konstruierte Fläche $\mathfrak{F}$ hat zwei Symmetrieebenen, nämlich die Meridianebene $\mathfrak{E}_1$ und die Äquatorebene $\mathfrak{E}_2$. Es läßt sich nun aber ein sehr einfaches Beispiel einer Fläche $\mathfrak{F}$ angeben, die nur Meridianebenen zu Symmetrieebenen hat, während das sphärische Bild der Krümmungslinien außerdem noch die Äquatorebene als Symmetrieebene besitzt.

Es sei $x = f(z)$ eine im Intervall $-a \leqq z \leqq a$ $(a > 0)$ definierte konvexe Kurve $\mathfrak{C}$ der $x, z$-Ebene mit stetiger Tangente und Krümmung. Es sei ferner $f(a) = f(-a) = 0$ und endlich seien die Tangenten an $\mathfrak{C}$ für $z = a$ und $z = -a$ der Koordinatenachse $z = 0$ parallel. Läßt man die Kurve $\mathfrak{C}$ um die $z$-Achse rotieren, so erhält man eine Rotationsfläche $\mathfrak{F}$, die im allgemeinen außer den Meridianebenen keine weiteren Symmetrieebenen hat; dann und nur dann wenn die Funktion $f(z)$ gerade, d. h. $f(-z) = f(z)$ ist, ist auch die Äquatorebene $z = 0$ Symmetrieebene von $\mathfrak{F}$. Das sphärische Bild der Krümmungslinien der Rotationsfläche $\mathfrak{F}$, das sich aus der Schar der größten Kugelkreise durch $S$ und $N$ und einer Schar von Parallelkreisen zusammensetzt, hat hingegen außer den Meridianebenen immer auch die Äquatorebene $w = 0$ zur Symmetrieebene.

Daraus folgt aber: Hat man auf der Einheitskugel ein orthogonales Kurvensystem $\mathfrak{S}$ mit den beiden Symmetrieebenen $v = 0$, $w = 0$, so ist die der Ebene $w = 0$ entsprechende Ebene $\mathfrak{E}_2$, die die konvexe zu $\mathfrak{S}$ gehörige Bildfläche $\mathfrak{F}$ längs der Krümmungslinie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ schneidet, nicht notwendig Symmetrieebene von $\mathfrak{F}$. Die im Abschnitt **49** mit Hilfe von zwei

Spiegelungen konstruierte Bildfläche $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{S}$ braucht somit nicht die allgemeinste Lösung des vorgelegten Problems zu sein. Man erhält eine unsymmetrische Lösung, wenn man von solchen Randwerten $\frac{\partial R_1(\alpha, 0)}{\partial \alpha}$ ausgeht, die zwar der Bedingung (50) des § 7 bzw. den Bedingungen (80) des § 10 genügen, wo aber außerdem

$$\frac{\partial R_1\left(\frac{\pi}{2}-\alpha, 0\right)}{\partial \alpha} \neq -\frac{\partial R_1\left(\frac{\pi}{2}+\alpha, 0\right)}{\partial \alpha}$$

ist.

Andererseits ist die der Ebene $v = 0$ entsprechende Ebene $\mathfrak{E}_1$, die die Bildfläche $\mathfrak{F}$ längs der Meridiankurven $\beta = 0$ und $\beta = \pi$ schneidet immer Symmetrieebene von $\mathfrak{F}$. Dies folgt daraus, daß das Integrationsproblem des Systems von Differentialgleichungen (18) des § 4, auf das das Problem der sphärischen Abbildung führt, durch die Werte von $R_1$ längs des Meridians $\beta = 0$ bereits eindeutig bestimmt ist.

Ist umgekehrt eine konvexe Fläche $\mathfrak{F}$ mit zwei Symmetrieebenen $y = 0$ und $z = 0$ vorgelegt, so folgt aus bekannten geometrischen Sätzen, daß die Schnittkurven der beiden Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ mit $\mathfrak{F}$ Krümmungslinien sind, da die beiden Ebenen alle Flächennormalen längs der Schnittkurven enthalten. Dann besitzt aber offenbar das sphärische Bild der Krümmungslinien immer die beiden Symmetrieebenen $v = 0$, $w = 0$.

## Kapitel IV.

## Die Periodizitätsforderung.

### § 14.

### Ein System von Integro-Differentialgleichungen.

**51.** Um der im Abschnitt **18**, § 3 angegebenen Periodizitätsbedingung (15) zu genügen, suche man Integrale $\zeta$ der Differentialgleichung (L), die in $\beta$ die Periode $2\pi$ haben, oder, was dasselbe ist, man suche nach periodischen Lösungspaaren $\xi, \eta$ des Systems ($L^*$) aus § 2, und zwar seien bezüglich der Koeffizienten von ($L^*$) zunächst nur die Voraussetzungen des § 1 zugrunde gelegt. (Also zunächst noch keine analytischen Koeffizienten!)

Neben dem System ($L^*$) betrachte man das System von Integro-Differentialgleichungen:

$$(106)\quad (\Lambda^*)\qquad \boxed{\begin{aligned} \xi_\beta(\alpha\beta) &= \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\eta(\alpha\beta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\eta(\alpha\tau)\,d\tau, \\ \eta_\alpha(\alpha\beta) &= \frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}\xi(\alpha\beta). \end{aligned}}$$

Ein Funktionenpaar $\xi, \eta$, das den Gleichungen ($\Lambda^*$) genügt, läßt sich durch das Verfahren der sukzessiven Approximation gewinnen, wobei man noch

die Werte von $\xi$ für $\beta = 0$ und die Werte von $\eta$ für $\alpha = \alpha_0$ willkürlich vorschreiben kann. Es sei etwa

$$\xi(\alpha, 0) = \varphi(\alpha), \qquad \eta(\alpha_0, \beta) = \psi(\beta). \tag{107}$$

Man setze nunmehr

$$\xi(\alpha\beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(\alpha\beta), \qquad \eta(\alpha\beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu(\alpha\beta), \tag{108}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\xi_0(\alpha\beta) = \varphi(\alpha), \qquad \eta_0(\alpha\beta) = \psi(\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{A_\beta(\sigma\beta)}{B(\sigma\beta)}\, \xi_0(\sigma\beta)\, d\sigma,\\
&\xi_{\nu+1}(\alpha\beta) = \int_0^{\beta} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\, \eta_\nu(\alpha\tau)\, d\tau - \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\, \eta_\nu(\alpha\tau)\, d\tau,\\
&\eta_{\nu+1}(\alpha\beta) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{A_\beta(\sigma\beta)}{B(\sigma\beta)}\, \xi_{\nu+1}(\sigma\beta)\, d\sigma.
\end{aligned}\right. \tag{109}$$

Da es für das Folgende von Wichtigkeit ist, die Abhängigkeit des Funktionenpaares $\xi, \eta$ von den Randwerten $\varphi(\alpha)$ zu erkennen, so bringe man die Näherungsfunktionen $\xi_\nu(\alpha\beta)$, $\eta_\nu(\alpha\beta)$ für $\nu \geqq 1$ auf die Form

$$\xi_\nu(\alpha\beta) = \Xi_\nu(\alpha\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Xi_\nu^*(\alpha\sigma;\beta)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

$$\eta_\nu(\alpha\beta) = \mathsf{H}_\nu(\alpha\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \mathsf{H}_\nu^*(\alpha\sigma;\beta)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei die $\Xi_\nu$, $\Xi_\nu^*$; $\mathsf{H}_\nu$, $\mathsf{H}_\nu^*$ durch die Rekursionsformeln

$$\left\{\begin{aligned}
&\Xi_1(\alpha\beta) = \int_0^{\beta} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\, \psi(\tau)\, d\tau - \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\, \psi(\tau)\, d\tau,\\
&\Xi_1^*(\alpha\sigma;\beta) = \int_0^{\beta} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)} \frac{A_\beta(\sigma\tau)}{B(\sigma\tau)}\, d\tau - \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)} \frac{A_\beta(\sigma\tau)}{B(\sigma\tau)} d\tau \quad (\alpha \geqq \sigma),\\
&\mathsf{H}_\nu(\alpha\beta) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{A_\beta(\sigma\beta)}{B(\sigma\beta)}\, \Xi_\nu(\sigma\beta)\, d\sigma,\\
&\mathsf{H}_\nu^*(\alpha\sigma;\beta) = \int_{\sigma}^{\alpha} \frac{A_\beta(s\beta)}{B(s\beta)}\, \Xi_\nu^*(s\sigma;\beta)\, ds \quad (\alpha \geqq \sigma),\\
&\Xi_{\nu+1}(\alpha\beta) = \int_0^{\beta} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\, \mathsf{H}_\nu(\alpha\tau)\, d\tau - \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\, \mathsf{H}_\nu(\alpha\tau)\, d\tau,\\
&\Xi_{\nu+1}^*(\alpha\sigma;\beta) = \int_0^{\beta} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\, \mathsf{H}_\nu^*(\alpha\sigma;\tau)\, d\tau - \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\, \mathsf{H}_\nu^*(\alpha\sigma;\tau)\, d\tau
\end{aligned}\right. \tag{110}$$

bestimmt sind. Man bemerkt leicht, daß nur die Funktionen $\Xi_\nu(\alpha\beta)$ und und $\mathsf{H}_\nu(\alpha\beta)$ von $\psi(\beta)$ abhängen, während die $\Xi_\nu^*(\alpha\sigma;\beta)$, $\mathsf{H}_\nu^*(\alpha\sigma;\beta)$ einzig aus den Koeffizienten der Gleichungen $(\mathrm{L}^*)$ aufgebaut sind.

Sind $M$ und $C$ zwei Konstanten derart, daß im Bereich

$$0 \leqq \alpha_0 \leqq \alpha \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \beta \leqq 2\pi \tag{111}$$

die Funktionen

$$|\psi(\beta)| \leqq C, \qquad \left|\frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\right| \leqq M, \qquad \left|\frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}\right| \leqq M$$

sind, so ergeben sich im Bereich (111) aus (110) die Abschätzungen

$$|\Xi_\nu| \leqq 2(2\pi)^{\nu-1} C M^{2\nu-1} \beta \frac{(\alpha-\alpha_0)^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

$$|\Xi_\nu^*| \leqq 2(2\pi)^{\nu-1} M^{2\nu} \beta \frac{(\alpha-\sigma)^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

$$|\mathsf{H}_\nu| \leqq 2(2\pi)^{\nu-1} C M^{2\nu} \beta \frac{(\alpha-\alpha_0)^{\nu}}{\nu!},$$

$$|\mathsf{H}_\nu^*| \leqq 2(2\pi)^{\nu-1} M^{2\nu+1} \beta \frac{(\alpha-\sigma)^{\nu}}{\nu!}.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar, daß die Reihen

$$\Xi(\alpha\beta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu(\alpha\beta), \qquad \Xi^*(\alpha\sigma;\beta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_\nu^*(\alpha\sigma;\beta),$$

$$\mathsf{H}(\alpha\beta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathsf{H}_\nu(\alpha\beta), \qquad \mathsf{H}^*(\alpha\sigma;\beta) = \frac{A_\beta(\sigma\beta)}{B(\sigma\beta)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathsf{H}_\nu^*(\alpha\sigma;\beta)$$

im Bereiche (111) absolut und gleichmäßig konvergieren.

Bildet man nunmehr die Reihen (108), so erhält man

$$\begin{cases} \xi(\alpha\beta) = \Xi(\alpha\beta) + \varphi(\alpha) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Xi^*(\alpha\sigma;\beta)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma, \\ \eta(\alpha\beta) = \mathsf{H}(\alpha\beta) + \psi(\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \mathsf{H}^*(\alpha\sigma;\beta)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma. \end{cases} \tag{112}$$

Wie man jetzt leicht beweist, genügt das Funktionenpaar $\xi(\alpha\beta)$, $\eta(\alpha\beta)$ den Gleichungen $(A^*)$ und nimmt die Randwerte (107) an. Außerdem läßt sich in der beim Verfahren der sukzessiven Approximation üblichen Weise zeigen, daß das System $(A^*)$ nur eine einzige Lösung $\xi, \eta$ mit den Randwerten (107) besitzt.

**52.** Aus den Rekursionsformeln (109) schließt man unmittelbar, daß die Funktionen $\xi_{\nu+1}$ und $\eta_{\nu+1}$ in $\beta$ die Periode $2\pi$ haben, wenn $\eta_\nu$ periodisch ist. $\eta_0$ ist aber dann und nur dann periodisch, wenn die Randwerte $\psi(\beta)$ periodisch sind. Daraus folgt aber: *Alle Lösungen des Systems* $(A^*)$, *deren Randwerte* $\eta(\alpha_0\beta)$ *periodisch in* $\beta$ *sind, sind selbst periodisch.*

Man bemerkt weiter leicht zwei Tatsachen:

1. *Ist das Funktionenpaar* $\xi(\alpha\beta)$, $\eta(\alpha\beta)$ *eine periodische Lösung des ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen* (L*), *so ist*

$$\int_0^{2\pi} \xi_\beta(\alpha\tau)\,d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\,\eta(\alpha\tau)\,d\tau = 0\,,$$

*und somit liefern* $\xi, \eta$ *gleichzeitig eine Lösung des Systems* ($\Lambda^*$).

2. *Ist das Funktionenpaar* $\xi(\alpha\beta)$, $\eta(\alpha\beta)$ *eine Lösung des Systems* ($\Lambda^*$), *so liefern* $\xi, \eta$ *dann und nur dann gleichzeitig eine Lösung des Systems* (L*), *wenn*

$$\int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\,\eta(\alpha\tau)\,d\tau = 0 \tag{113}$$

*ist.*

Aus diesen beiden Tatsachen folgt aber der

Satz. *Alle periodischen Lösungen des Systems* (L*) *stimmen überein mit denjenigen periodischen Lösungen des Systems* ($\Lambda^*$), *welche der Nebenbedingung* (113) *genügen.*

Wenn man mithin an Stelle von (L*) das System ($\Lambda^*$) mit der Nebenbedingung (113) behandelt, so hat man den Vorteil, daß das System ($\Lambda^*$) immer periodische Lösungen hat, wofern die Randwerte $\eta(\alpha_0\beta)$ periodisch sind und sich mithin diese Lösungen als periodische Funktionen in Fourierreihen entwickeln lassen. Auf die Fourierentwicklungen stützen sich nun aber alle folgenden Untersuchungen.

## § 15.

## Das unendliche System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

**53.** Es sei $\xi(\alpha\beta)$, $\eta(\alpha\beta)$ eine periodische Lösung des Systems ($\Lambda^*$); dann lassen sich die Funktionen $\xi(\alpha\beta)$ und $\eta(\alpha\beta)$ und die beiden Koeffizienten $\frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}$ und $\frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}$ als Funktionen, die in $\beta$ periodisch und mindestens einmal nach $\beta$ stetig differentiierbar sind, in absolut konvergente Fourierreihen entwickeln. Man setze

$$\begin{cases} \dfrac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)} = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu(\alpha)\,e^{i\nu\beta}\,, \\ \dfrac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)} = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu(\alpha)\,e^{i\nu\beta}\,, \end{cases} \tag{114}$$

$$(115)\qquad \begin{cases} \xi(\alpha\beta) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} \xi_\nu(\alpha)\, e^{i\nu\beta}, \\ \eta(\alpha\beta) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} \eta_\nu(\alpha)\, e^{i\nu\beta}. \end{cases}$$

Da die Funktionen $\frac{B_\alpha}{A}$, $\frac{A_\beta}{B}$, $\xi$, $\eta$ alle reell sind, so folgt

$$a_{-\nu} = \bar{a}_\nu, \qquad b_{-\nu} = \bar{b}_\nu, \qquad \xi_{-\nu} = \bar{\xi}_\nu, \qquad \eta_{-\nu} = \bar{\eta}_\nu,$$

wenn, wie üblich, unter $\bar{z}$ die zu $z$ konjugiert komplexe Zahl verstanden wird. Für die Fourierkoeffizienten $a_\nu$ und $b_\nu$ erhält man die Formeln:

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\, e^{-i\nu\beta}\, d\beta = \frac{a_\nu^*}{i\nu} \qquad (\nu \neq 0),$$

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}\, e^{-i\nu\beta}\, d\beta = \frac{b_\nu^*}{i\nu} \qquad (\nu \neq 0),$$

wenn

$$a_\nu^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\right) e^{-i\nu\beta}\, d\beta,$$

$$b_\nu^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}\right) e^{-i\nu\beta}\, d\beta$$

die Fourierkoeffizienten von $\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B_\alpha}{A}\right)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A_\beta}{B}\right)$ bezeichnen.

Aus der Abschätzung

$$(116)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| \leqq \sqrt{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\right)\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu^*|^2\right)}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu| \leqq \sqrt{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\right)\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu^*|^2\right)} \end{cases}$$

liest man die Konvergenz der Reihen $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} |a_\nu|$, $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} |b_\nu|$ ab. Es sei $M$ eine Konstante, derart, daß im Bereich $0 \leqq \alpha \leqq \pi$, $0 \leqq \beta \leqq 2\pi$

$$(117)\qquad \left|\frac{B_\alpha}{A}\right| \leqq M, \quad \left|\frac{A_\beta}{B}\right| \leqq M, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B_\alpha}{A}\right)\right| \leqq M, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A_\beta}{B}\right)\right| \leqq M$$

ist; dann erhält man

$$(118)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} |a_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\right|^2 d\beta \leqq M^2, \\ \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} |b_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}\right|^2 d\beta \leqq M^2, \end{cases}$$

(119)
$$|a_0| \leqq M, \qquad |b_0| \leqq M,$$
$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} |a_\nu^*|^2 \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)} \right) \right|^2 d\beta \leqq M^2,$$
$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} |b_\nu^*|^2 \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)} \right) \right|^2 d\beta \leqq M^2.$$

Mithin schließt man aus (116) und (119), wenn man noch abkürzend

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = N^2$$

setzt:

(120)
$$\begin{cases} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |a_\nu| \leqq M + 2NM, \\ \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |b_\nu| \leqq M + 2NM, \end{cases}$$

unabhängig von $\alpha$.

**54.** Wenn man die Reihen (114) und (115) in $(A^*)$ substituiert und die entsprechenden Fourierkoeffizienten einander gleich setzt, so ergibt sich

(121)
$$i\nu\xi_\nu(\alpha) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-\mu}(\alpha)\,\eta_\mu(\alpha) \qquad (-\infty < \nu < +\infty,\ \nu \neq 0),$$
$$\frac{d\eta_\nu(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} b_{\nu-\mu}(\alpha)\,\xi_\mu(\alpha) \qquad (-\infty < \nu < +\infty),$$

oder nach Elimination der Funktionen $\xi_\mu(\alpha)$ für $\mu \neq 0$

(122) (D)
$$\boxed{\frac{d\eta_\nu(\alpha)}{d\alpha} = b_\nu(\alpha)\,\xi_0(\alpha) + \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} p_{\nu\varkappa}(\alpha)\,\eta_\varkappa(\alpha)},$$

wobei

(123)
$$\boxed{p_{\nu\varkappa}(\alpha) = -i \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{b_{\nu-\mu}(\alpha)\,a_{\mu-\varkappa}(\alpha)}{\mu}}$$ [18])

gesetzt ist.

Die in den Differentialgleichungen (D) auftretende Größe

$$\xi_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\alpha\beta)\,d\beta$$

---

[18]) Der Strich hinter dem $\Sigma$-Zeichen deutet in üblicher Weise an, daß bei der Summation nach $\mu$ der Wert von $\mu = 0$ auszulassen ist.

kann als willkürliche Funktion angesehen werden. Anstatt wie in § 14 ein Lösungspaar $\xi, \eta$ des Systems $(\Lambda^*)$ zu suchen, das den Randbedingungen (107) genügt, kann man die Lösung von $(\Lambda^*)$ auch dadurch eindeutig machen, daß man sich die Funktionen

$$(124) \qquad \psi(\beta) = \eta(\alpha_0 \beta), \qquad \xi_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\alpha\beta)\, d\beta$$

willkürlich vorgibt. Um das zu zeigen, gehe man von der Darstellung (112) § 14 für $\xi(\alpha\beta)$ aus und integriere nach $\beta$ im Intervall $0 \leqq \beta \leqq 2\pi$. Dann ergibt sich nach der Vertauschung der Integrationsfolge

$$(125) \quad \xi_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Xi(\alpha\beta)\, d\beta + \varphi(\alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left( \int_0^{2\pi} \Xi^*(\alpha\sigma; \beta)\, d\beta \right) \varphi(\sigma)\, d\sigma.$$

Ist nun $\xi_0(\alpha)$ eine willkürliche stetige Funktion, so liefert die Formel (125) zur Berechnung von $\varphi(\alpha)$ eine reguläre Integralgleichung vom Volterraschen Typus, die immer eindeutig lösbar ist. Es existiert mithin immer eine eindeutig bestimmte Lösung $\xi, \eta$ des Systems $(\Lambda^*)$, die den Bedingungen (124) genügt.

Nunmehr kann man die Gleichungen (D) als ein System von unendlich vielen gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung der Funktionen $\eta_\nu(\alpha)$ $(-\infty < \nu < +\infty)$ auffassen. Nach dem Vorhergehenden hat dieses System immer mindestens eine Lösung, wie auch die stetige Funktion $\xi_0(\alpha)$ gewählt sein mag, nämlich die Fourierkoeffizienten derjenigen Funktion $\eta(\alpha\beta)$, welche zusammen mit der zugehörigen Funktion $\xi(\alpha\beta)$ das System $(\Lambda^*)$ und die Bedingungen (124) befriedigt.

Die Nebenbedingung (113) läßt sich auch durch die Fourierkoeffizienten $a_\nu$, $\eta_\nu$ einfach ausdrücken; sie lautet jetzt

$$(126) \qquad \boxed{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, \eta_\nu(\alpha) = 0}\ .\ ^{19})$$

---

[19]) Man gehe von der Annahme aus, $\xi, \eta$ sei eine periodische Lösung des Systems (L*), entwickle $\xi, \eta$ in die Fourierreihen (115) und suche nach notwendigen Bedingungen für die Fourierkoeffizienten $\xi_\nu(\alpha)$ und $\eta_\nu(\alpha)$, indem man für die Koeffizienten $\frac{B_\alpha}{A}$ und $\frac{A_\beta}{B}$ einerseits bzw. für $\xi$ und $\eta$ andererseits die Reihen (114) bzw. (115) in (L*) einsetzt. Man wird dann auf die Gleichungen (121), (122), (126) geführt. Fragt man nunmehr, welchem Gleichungssystem genügen zwei in $\beta$ periodische Funktionen $\xi, \eta$, deren Fourierkoeffizienten $\xi_\nu, \eta_\nu$ nur die Gleichungen (121) und (122), aber nicht mehr (126) befriedigen, so findet man, daß dieses Funktionenpaar gerade dem System von Integro-Differentialgleichungen $(\Lambda^*)$ genügt. So wird man dazu geführt, anstatt vom System (L*) vielmehr vom System $(\Lambda^*)$ auszugehen.

**55.** Die weitere Untersuchung besteht nun darin:

1. Ausdrücke für $\eta_\nu(\alpha)$ zu konstruieren, die erkennen lassen, wie die $\eta_\nu$ von der noch verfügbaren Funktion $\xi_0(\alpha)$ abhängen;

2. diese Ausdrücke in die Summe (126) einzusetzen, um die Funktion $\xi_0(\alpha)$ so zu bestimmen, daß die Nebenbedingung (126) erfüllt ist.

Um den ersten Punkt zu erledigen, suchen wir das unendliche System von Differentialgleichungen (D) zu integrieren und berichten daher im § 16 zunächst über eine Folge von Sätzen, die zeigen, wie bei unendlichen Systemen die Integrale des inhomogenen Systems mit denen des zugehörigen homogenen Systems zusammenhängen. Diese Sätze werden eine vollständige Analogie zwischen endlichen und unendlichen Systemen von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung erkennen lassen.

## § 16.

## Bericht über die Integration eines Systems von unendlich vielen gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung[20].

**56.** Definition. Es sei eine unendliche Matrix $A = (a_{\nu\varkappa})$ vorgelegt, deren Elemente $a_{\nu\varkappa} = a_{\nu\varkappa}(t)$ im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ definierte stetige Funktionen von $t$ sind. Es existiere ferner eine feste Konstante $M$ derart, daß im ganzen Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ für alle $n$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\nu\varkappa} x_\nu y_\varkappa \right| \leqq M \sqrt{\left( \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 \right) \left( \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^2 \right)} \tag{127}$$

---

[20]) Vgl. Fußnote [6]) der Einleitung. Von den bisher veröffentlichten Abhandlungen über unendliche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung erwähnen wir:

W. Sternberg, Über Systeme unendlich vieler gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen, Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1920, Abhdlg. 10, S. 1–21. In dieser Note wird der Existenzbeweis einer Lösung des inhomogenen linearen Systems bei gegebenen Anfangsbedingungen durchgeführt und außerdem ein Fundamentalsystem des homogenen Systems konstruiert. Doch sind Methoden und Voraussetzungen zu spezieller Natur, als daß sie für unsere Zwecke brauchbar sind.

Einen sehr viel allgemeineren Charakter tragen zwei Abhandlungen von

A. Wintner, Zur Theorie der unendlichen Differentialsysteme, Math. Annalen **95** (1926), S. 544–556.

A. Wintner, Zur Lösung von Differentialsystemen mit unendlich vielen Veränderlichen, Math. Annalen **98** (1928), S. 273–280.

Die Arbeiten enthalten den Beweis der Existenztheoreme im analytischen Fall für sehr allgemeine Systeme von Differentialgleichungen unter Konvergenzvoraussetzungen, die etwa denen unseres Textes entsprechen. Doch sind dort die speziellen Eigenschaften der linearen Systeme, die in den Sätzen 3 und 4 des Textes formuliert sind, in keiner Weise behandelt.

ist, wenn die $x_\nu$ und $y_\varkappa$ beliebige unabhängige Veränderliche bezeichnen. Dann nennen wir die Matrix $A$ gleichmäßig beschränkt.

Ist außerdem auch für jedes $n$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}|a_{\nu\varkappa}|\,|x_\nu y_\varkappa| \leqq M\sqrt{\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu|^2\Big)}, \tag{128}$$

so nennen wir die Matrix $A$ absolut und gleichmäßig beschränkt[21]).

Sind die $a_{\nu\varkappa}(t)$ nicht nur für reelle Werte von $t$ im Intervall $t_0 \leqq t < t_1$, sondern als Funktionen der komplexen Veränderlichen $t$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ der komplexen Ebene definiert, und bestehen die Abschätzungen (127) bzw. (128) für jeden Wert von $t$ des Bereiches $\mathfrak{B}$, so sagen wir, die Matrix $A$ ist in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig (bzw. absolut und gleichmäßig) beschränkt.

Satz 1. Sind $A$ und $B$ zwei im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ oder im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig (bzw. absolut und gleichmäßig) beschränkte Matrizen, so ist auch ihre Summe $A+B$ und ihr Produkt $AB$ im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ oder im Bereich $\mathfrak{B}$ gleichmäßig (bzw. absolut und gleichmäßig) beschränkt.

**57.** Satz 2. Es sei $A=(a_{\nu\varkappa})$ eine im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ gleichmäßig beschränkte Matrix. Dann besitzt das System von unendlich vielen gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_\nu(t)}{dt} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_{\nu\varkappa}(t)\,y_\varkappa(t) \qquad (\nu < 1, 2, \ldots \to \infty) \tag{129}$$

eine partikuläre Lösung

$$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_\nu(t), \ldots,$$

die für $t=t_0$ beliebige Anfangswerte

$$y_\nu(t_0) = c_\nu$$

annimmt, wofern $\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2$ konvergiert. Außerdem ist auch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}|y_\nu(t)|^2$ im ganzen Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ gleichmäßig konvergent, und endlich ist durch die Anfangswerte $c_\nu$ die Lösung von (129) eindeutig bestimmt.

Satz 3. Es sei eine beschränkte Matrix $C=(c_{\nu\lambda})$ vorgelegt, deren Elemente $c_{\nu\lambda}$ Konstante sind. Außerdem sei $C$ beschränkt und besitze eine eindeutige beschränkte Reziproke $C^{-1}$. Dann hat unter den Voraussetzungen von Satz 2 das System (129) unendlich viele partikuläre Lösungen

$$y_{1\lambda}(t), y_{2\lambda}(t), \ldots, y_{\nu\lambda}(t), \ldots,$$

die den Anfangsbedingungen

$$y_{1\lambda}(t_0) = c_{1\lambda}, \quad y_{2\lambda}(t_0) = c_{2\lambda}, \quad \ldots, \quad y_{\nu\lambda}(t_0) = c_{\nu\lambda}, \quad \ldots$$

---

[21]) Vgl. Hellinger-Toeplitz: Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, Math. Annalen **69** (1910), S. 289–330; siehe insbesondere S. 296 und S. 308.

genügen. Diese unendlich vielen partikulären Lösungen von (129) bilden ein Fundamentalsystem, d. h.

1. jedes partikuläre Integral von (129) läßt sich in der Form

$$y_1 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda y_{1\lambda}, \quad y_2 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda y_{2\lambda}, \quad \ldots, \quad y_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda y_{\nu\lambda}, \quad \ldots$$

darstellen, wo die $x_\lambda$ geeignet gewählte Konstante mit konvergenter Quadratsumme $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |x_\lambda|^2$ bedeuten.

2. Die Matrix $Y = (y_{\nu\lambda})$ ist im ganzen Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ gleichmäßig beschränkt und besitzt dort eine gleichmäßig beschränkte Reziproke $Y^{-1} = (Y_{\lambda\mu})$, deren Elemente $Y_{\lambda\mu} = Y_{\lambda\mu}(t)$ stetig differentiierbare Funktionen sind.

3. Die Funktionen $Y_{\lambda\mu}(t)$ genügen für jedes $\lambda$ dem zu (129) adjungierten System von Differentialgleichungen

$$\frac{dY_\mu(t)}{dt} = -\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_{\varkappa\mu}(t)\, Y_\varkappa(t) \tag{130}$$

und bilden ein Fundamentalsystem von (130), derart, daß jedes partikuläre Integral von (130) in der Form

$$Y_1(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda Y_{\lambda 1}(t), \quad Y_2(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda Y_{\lambda 2}(t), \quad \ldots, \quad Y_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda Y_{\lambda\mu}(t), \quad \ldots$$

dargestellt werden kann, wo die $x_\lambda$ geeignet gewählte Konstante mit konvergenter Quadratsumme $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |x_\lambda|^2$ bedeuten.

Satz 4. Die Funktionen $y_{\nu\lambda}(t)$ mögen wie in Satz 3 unter den Voraussetzungen von Satz 2 ein Fundamentalsystem von (129) bilden, und es sei $Y^{-1} = (Y_{\lambda\mu})$ die Reziproke von $Y = (y_{\nu\lambda})$.

Es sei ferner neben dem homogenen System (129) auch ein System von unendlich vielen inhomogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:

$$\frac{dy_\nu(t)}{dt} = b_\nu(t) + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_{\nu\varkappa}(t)\, y_\varkappa(t). \tag{131}$$

Hierbei seien die $b_\nu(t)$ im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ stetige Funktionen und es sei dort $\sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu(t)|^2$ gleichmäßig konvergent. Dann läßt sich jedes partikuläre Integral von (131) in der Form

$$y_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\nu\lambda}\left(x_\lambda + \int_{t_0}^{t} \sum_{\mu=0}^{\infty} Y_{\lambda\mu}(\tau)\, b_\mu(\tau)\, d\tau\right) \tag{132}$$

darstellen, wo die $x_\lambda$ wieder geeignet gewählte Konstante mit konvergenter

Quadratsumme $\sum_{\lambda=1}^{\infty}|x_\lambda|^2$ bedeuten. Außerdem ist auch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}|y_\nu|^2$ konvergent.

**58.** Satz 5. Es seien die Elemente $a_{\nu\varkappa}(t)$ der Matrix $A$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ der komplexen $t$-Ebene reguläre analytische Funktionen von $t$ und es sei $A$ in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig beschränkt. Dann sind unter den Voraussetzungen von Satz 3 für die Matrix $C$ die Funktionen $y_{\nu\lambda}(t)$ aus Satz 3, die ein Fundamentalsystem von (129) bilden, sämtlich in jedem Bereich $\mathfrak{B}'$, der ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ enthalten ist, regulär analytisch. Das gleiche gilt für die Funktionen $Y_{\lambda\mu}(t)$ der zu $Y=(y_{\nu\lambda})$ reziproken Matrix $Y^{-1}=(Y_{\lambda\mu})$. Außerdem sind die Matrizen $Y$ und $Y^{-1}$ beide in $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig beschränkt.

Sind endlich auch die $b_\nu(t)$ in $\mathfrak{B}$ reguläre analytische Funktionen, so sind auch die Funktionen $y_\nu(t)$ der Lösung (132) des inhomogenen Systems (131) sämtlich in $\mathfrak{B}'$ regulär analytisch.

## § 17.

## Die charakteristische Volterrasche Integralgleichung.

**59.** Um die Sätze des § 16 auf das System von linearen Differentialgleichungen (D) anwenden zu können, zeigen wir zunächst, daß die Matrix $(p_{\nu\varkappa})$ des Systems (D) im Intervall $0\leqq\alpha\leqq\pi$ gleichmäßig und absolut beschränkt ist. Wir gehen dabei von den beiden Toeplitzschen $L$-Matrizen[22]) aus, dann ist[23])

$$A=(a_{\nu-\varkappa}),\qquad B=(b_{\nu-\varkappa})$$

$$\sum_{\nu=-n}^{+n}\sum_{\varkappa=-n}^{+n}|a_{\nu-\varkappa}|\,x_\nu\,y_\varkappa\Big|\leqq\Big(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}|a_\nu|\Big)\sqrt{\Big(\sum_{\nu=-n}^{+n}|x_\nu|^2\Big)\Big(\sum_{\nu=-n}^{+n}|y_\nu|^2\Big)},$$

$$\Big|\sum_{\nu=-n}^{+n}\sum_{\varkappa=-n}^{+n}|b_{\nu-\varkappa}|\,x_\nu\,y_\varkappa\Big|\leqq\Big(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}|b_\nu|\Big)\sqrt{\Big(\sum_{\nu=-n}^{+n}|x_\nu|^2\Big)\Big(\sum_{\nu=-n}^{+n}|y_\nu|^2\Big)}.$$

Nun sind aber die Reihen $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}|a_\nu|$ und $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}b_\nu$ nach den Formeln (126) des § 15 im Intervall $0\leqq\alpha\leqq\pi$ gleichmäßig beschränkt, mithin sind auch die Matrizen $A$ und $B$ für $0\leqq\alpha\leqq\pi$ gleichmäßig und absolut beschränkt. Endlich führe man noch die absolut beschränkte Diagonalmatrix $Z$ ein, deren Elemente

$$z_{0\varkappa}=0,\qquad z_{\nu\varkappa}=\frac{e_{\nu\varkappa}}{\nu}\qquad\left(\nu\neq 0,\ \begin{matrix}-\infty<\nu<+\infty\\ -\infty<\varkappa<+\infty\end{matrix}\right)$$

[22]) O. Toeplitz, Theorie der $L$-Formeln, Math. Annalen **70** (1911), S. 351–376; vgl. insbes. S. 354–357.

[23]) Loc. cit. Fußnote [20]), vgl. S. 356.

einfache Zahlen sind. (Unter $e_{\nu\varkappa}$ ist hierbei in üblicher Weise das Element der Einheitsmatrix verstanden.) Dann ist die Matrix

$$(i\,p_{\nu\varkappa}) = B\,Z\,A \tag{133}$$

(vgl. Formel (123) des § 15) als Produkt aus drei gleichmäßig und absolut beschränkten Matrizen nach Satz 1 des § 16 selbst im Intervall $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ gleichmäßig und absolut beschränkt und es lassen sich somit die Sätze 2 bis 4 des § 16 auf das System (D) anwenden.

Zunächst folgt aus Satz 3 die Existenz eines Fundamentalsystems des den Gleichungen (D) zugeordneten homogenen Systems. Ist $Y = (y_{\nu\lambda})$ die Matrix des Fundamentalsystems, so ist

$$\frac{dy_{\nu\lambda}(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} p_{\nu\varkappa}(\alpha)\, y_{\varkappa\lambda}(\alpha). \tag{134}$$

Außerdem existiert die zu $Y$ reziproke Matrix $Y^{-1} = (Y_{\lambda\mu})$, deren Elemente $Y_{\lambda\mu}(\alpha)$ den Differentialgleichungen

$$\frac{dY_{\lambda\mu}}{d\alpha} = -\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} p_{\varkappa\mu} Y_{\lambda\varkappa} \tag{135}$$

genügen. Jedes partikuläre Integral $\eta_\nu$ des inhomogenen Systems (D) läßt sich nun mit Hilfe der Elemente der beiden Fundamentalsysteme $y_{\nu\lambda}$ und $Y_{\lambda\mu}$ ausdrücken, und zwar ist auf Grund von Satz 4 Formel (132)

$$\eta_\nu(\alpha) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} y_{\nu\lambda}(\alpha)\left(x_\lambda + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} Y_{\lambda\mu}(\sigma)\, b_\mu(\sigma)\, \xi_0(\sigma)\, d\sigma\right). \tag{136}$$

Hierbei werden die $x_\lambda$ aus dem System linearer Gleichungen

$$\eta_\nu(\alpha_0) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} x_\lambda\, y_{\nu\lambda}(\alpha_0)$$

bestimmt, und es ergibt sich

$$x_\lambda = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} Y_{\lambda\mu}(\alpha_0)\, \eta_\mu(\alpha_0), \tag{137}$$

wobei $\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} |x_\lambda|^2$ gleichmäßig mit $\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} |\eta_\mu(\alpha_0)|^2$ konvergiert.

**60.** Genügt die Lösung $\eta_\nu$ der Bedingung (126), so erhält man

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, \eta_\nu(\alpha) \tag{138}$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha)\left(x_\lambda + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} Y_{\lambda\mu}(\sigma)\, b_\mu(\sigma)\, \xi_0(\sigma)\, d\sigma\right) = 0.$$

Da die Matrizen $Y$ und $Y^{-1}$ gleichmäßig beschränkt sind, so existiert eine Konstante $K$, derart, daß für alle ganzen positiven Zahlen $n_1, n_2$;

$l_1, l_2;\ m_1, m_2$

$$(139)\quad \begin{cases} \left| \sum\limits_{\nu=-n_1}^{n_2} \sum\limits_{\lambda=-l_1}^{l_2} y_{\nu\lambda} u_\nu v_\lambda \right| \leqq K \sqrt{\left( \sum\limits_{\nu=-n_1}^{n_2} |u_\nu|^2 \right) \left( \sum\limits_{\lambda=-l_1}^{l_2} |v_\lambda|^2 \right)}, \\ \left| \sum\limits_{\lambda=-l_1}^{l_2} \sum\limits_{\mu=-m_1}^{m_2} Y_{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu \right| \leqq K \sqrt{\left( \sum\limits_{\lambda=-l_1}^{l_2} |u_\lambda|^2 \right) \left( \sum\limits_{\mu=-m_1}^{m_2} |v_\mu|^2 \right)}. \end{cases}$$ [24])

Daraus folgt nach einem elementaren Satz aus der Theorie der unendlichen beschränkten Matrizen[25])

$$(140)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left| \sum\limits_{\nu=-n_1}^{n_2} y_{\nu\lambda} a_{-\nu} \right|^2 \leqq K^2 \sum\limits_{\nu=-n_1}^{n_2} |a_{-\nu}|^2 \leqq K^2 M^2 \quad \text{wegen (118) § 15}, \\ \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left| \sum\limits_{\mu=-m_1}^{m_2} Y_{\lambda\mu} b_\mu \right|^2 \leqq K^2 \sum\limits_{\mu=-m_1}^{m_2} |b_\mu|^2 \leqq K^2 M^2 \quad \text{wegen (118) § 15}, \end{cases}$$

ferner nach der Schwarzschen Ungleichheitsbeziehung

$$(141)\quad \left| \sum_{\lambda=-l_1}^{l_2} \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} y_{\nu\lambda}(\alpha)\, a_{-\nu}(\alpha) \left( \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} Y_{\lambda\mu}(\sigma)\, b_\mu(\sigma) \right) \right| \leqq \sqrt{\left( \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} y_{\nu\lambda} a_{-\nu} \right|^2 \right) \left( \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} Y_{\lambda\mu} b_\mu \right|^2 \right)} \leqq K^2 M^2.$$

Da alle Partialsummen der Doppelsumme nach $\lambda$ und $\nu$ im ganzen Bereich $0 \leqq \sigma \leqq \alpha \leqq \pi$ gleichmäßig beschränkt sind, so läßt sich nach einem bekannten Satz von Lebesgue die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen, und es ergibt sich aus (138) die Volterrasche Integralgleichung

$$(142)\quad \boxed{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha)\, x_\lambda + \int_{\alpha_0}^{\alpha} V(\alpha\sigma)\, \xi_0(\sigma)\, d\sigma = 0},$$

wobei

$$(143)\quad \boxed{V(\alpha\sigma) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha) \right) \left( \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} b_\mu(\sigma)\, Y_{\lambda\mu}(\sigma) \right)}$$

gesetzt ist.

Die Gleichung (142) nennen wir die charakteristische Integralgleichung des Problems, denn sie führt unmittelbar zur Bestimmung aller periodischen Lösungen des Systems (L*), indem sie die notwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert, daß die mit (113) aus § 14 äquivalente Nebenbedingung (126) erfüllt ist.

---

[24]) Um Verwechslungen vorzubeugen, sind hier die unabhängigen Veränderlichen der Bilinearform mit $u_\nu$, $v_\lambda$ statt mit $x_\nu$, $y_\lambda$ bezeichnet.

[25]) Siehe loc. cit. Fußnote [22]), vgl. insbes. S. 301.

**61.** Der Kern $V(\alpha\sigma)$ läßt sich leicht in übersichtlicher Form durch dasjenige Lösungspaar

$$\xi(\alpha\beta;\alpha_0), \qquad \eta(\alpha\beta;\alpha_0)$$

des Systems $(A^*)$ darstellen, welches durch die Bedingungen

$$\eta(\alpha_0\beta;\alpha_0)=\frac{A_\beta(\alpha_0\beta)}{B(\alpha_0\beta)}, \qquad \int_0^{2\pi}\xi(\alpha\beta;\alpha_0)\,d\beta=\xi_0(\alpha;\alpha_0)=0$$

eindeutig bestimmt ist. Es ergibt sich nämlich aus Formel (136) in Verbindung mit (137) wegen (114) und (115)

$$\eta(\alpha\beta;\alpha_0)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\eta_\nu(\alpha;\alpha_0)\,e^{i\nu\beta},$$

$$\eta_\nu(\alpha_0;\alpha_0)=b_\nu(\alpha_0),$$

$$\eta_\nu(\alpha;\alpha_0)=\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}y_{\nu\lambda}(\alpha)\,Y_{\lambda\mu}(\alpha_0)\,b_\mu(\alpha_0),$$

folglich wegen (143)

$$V(\alpha,\alpha_0)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}a_{-\nu}(\alpha)\,\eta_\nu(\alpha;\alpha_0)$$

(144)
$$\boxed{V(\alpha,\alpha_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\,\eta(\alpha\beta;\alpha_0)\,d\beta},$$

und so erhält man eine Darstellung des Kerns $V(\alpha\sigma)$, die nicht mehr von einem Fundamentalsystem des unendlichen Systems von Differentialgleichungen (134) abhängt.

## § 18.

## Hauptfall und singulärer Fall; die vollständige Lösung des Problems der sphärischen Abbildung.

**62.** Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem der Kern $V(\alpha,\sigma)$ identisch verschwindet oder nicht und *nennen den Fall*

$$V(\alpha\sigma)\equiv 0$$

*den Hauptfall, den Fall*

$$V(\alpha\sigma)\not\equiv 0$$

*den singulären Fall.* Entsprechend sagen wir: Das vorgelegte Problem ist entweder vom *Haupttypus* oder vom *singulären Typus.*

## I. Der Hauptfall.

**63.** Wenn $V(\alpha\sigma) \equiv 0$ ist, so reduziert sich die charakteristische Integralgleichung (142) des Problems auf die gewöhnliche homogene lineare Gleichung

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha)\, x_\lambda = 0,$$

oder aber indem man für die $x_\lambda$ die Ausdrücke aus (137) einsetzt und die Reihenfolge der Summation passend vertauscht, auf

$$(145) \qquad \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Big( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha) \Big) \Big( \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \eta_\mu(\alpha_0)\, Y_{\lambda\mu}(\alpha_0) \Big) = 0;$$

das heißt aber die Periodizität eines Lösungspaares $\xi, \eta$ des Systems $(L^*)$ hängt nur noch von den Randwerten von $\eta$ für $\alpha = \alpha_0$ ab.

Ist nun $\eta(\alpha_0, \beta) = 0$, so werden alle $\eta_\mu(\alpha_0) = 0$, und die Bedingung (145) ist erfüllt. Daraus folgt bereits, daß das Funktionenpaar

$$\xi(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0) = \frac{H_\alpha(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)}{A(\alpha\beta)}; \qquad \eta(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0) = \frac{H_\beta(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)}{B(\alpha\beta)}$$

periodisch in $\beta$ ist, wenn $H(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)$ wieder die Funktion des Abschnitts **22**, § 5 bedeutet, denn nach Formel (38) § 6 ist dann

$$\eta(\alpha_0\beta; \alpha_0\beta_0) = 0.$$

**64.** Es sei nunmehr

$$(146) \qquad \eta(\alpha_0\beta) = c\,\frac{A_\beta(\alpha_0\beta)}{B(\alpha_0\beta)}$$

unter $c$ eine beliebige Konstante verstanden, dann wird nach Formel (114) § 15

$$(147) \qquad \eta_\mu(\alpha_0) = c\, b_\mu(\alpha_0).$$

Wenn man diese Werte für $\eta_\mu(\alpha_0)$ in die Summe linker Hand von (145) einsetzt, so ergibt sich mit Rücksicht auf (143)

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Big( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha) \Big) \Big( \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c\, Y_{\lambda\mu}(\alpha_0)\, b_\mu(x_0) \Big) = c\, V(\alpha, \alpha_0).$$

Nun ist aber im Hauptfalle $V(\alpha, \alpha_0) \equiv 0$, und somit ist die Periodizitätsbedingung (145) für alle Lösungspaare $\xi, \eta$, die der Randbedingung (147) genügen, erfüllt.

Setzt man nunmehr

$$\xi(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0) = \frac{G_\alpha(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)}{A(\alpha\beta)}, \qquad \eta(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0) = \frac{G_\beta(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)}{B(\alpha\beta)},$$

so genügt dieses Funktionenpaar nach Formel (38) § 6 der Randbedingung (146)

für $c = \frac{1}{A(\alpha_0, \beta_0)}$, mithin sind auch $\frac{G_\alpha}{A}$ und $\frac{G_\beta}{B}$ periodische Funktionen. Nun ist aber nach Formel (40) § 6

$$G(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0) = 1 + \int_0^\alpha G_\sigma(\sigma\beta; \alpha_0\beta_0)\, d\sigma,$$

$$H(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0) = \int_0^\alpha H_\sigma(\sigma\beta; \alpha_0\beta_0)\, d\sigma,$$

und somit sind auch die Funktionen

$$G(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0), \qquad H(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)$$

selbst periodische Funktionen von $\beta$.

Nach den Ausführungen des Abschnitts **42**, § 11 sind aber $R_1$ und damit auch $\mathfrak{x}$ periodisch in $\beta$, wenn $G(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)$ in $\beta$ periodisch ist. Mithin ist im Hauptfall die Periodizitätsforderung immer von selbst erfüllt, und es genügt somit, die Randwerte von $R_1$ für $\beta = \beta_0$ so zu wählen, daß auch der Forderung I (Nabel im Bildpunkte von $N$) genügt wird; d. h. aber: die Werte von $\frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}$, die der Bedingung (50) § 7 bzw. im analytischen Falle den Bedingungen (80) § 10 genügen, liefern im Hauptfalle sämtliche geschlossenen Bildflächen $\mathfrak{F}$, indem man zunächst $R_1$ nach Formel (42) § 6 und dann $\mathfrak{x}$ nach Formel (29) § 4 berechnet.

In den Abschnitten **68** und **69** dieses Paragraphen werden wir zeigen, daß die in Kapitel III untersuchten speziellen Fälle der sphärischen Abbildung sämtlich vom Haupttypus sind.

## II. Der singuläre Fall.

**65.** Ist $V(\alpha\sigma) \not\equiv 0$, so suchen wir den Vektor $\mathfrak{x}$, der zur Bildfläche $\mathfrak{F}$ gehört, in der Form (11) des § 2

$$\mathfrak{x} = \xi \frac{\mathfrak{u}_\alpha}{A} + \eta \frac{\mathfrak{u}_\beta}{B} + \zeta\, \mathfrak{u}$$

darzustellen. Hierbei müssen $\xi, \eta$ den Randbedingungen (12) in § 3

$$\xi(0, \beta) = 0, \qquad \eta(0, \beta) = 0$$

genügen, während $\zeta$ aus Formel (13) des § 3 gewonnen wird. Aus $\eta(0, \beta) = 0$ folgt nach Formel (137) $x_\lambda = 0$ für alle $\lambda$, und es ergibt sich nunmehr aus (136)

$$\eta_\nu(\alpha) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} y_{\nu\lambda}(\alpha) \int_0^\alpha \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} Y_{\lambda\mu}(\sigma)\, b_\mu(\sigma)\, \xi_0(\sigma)\, d\sigma. \tag{148}$$

Hierbei ist $\xi_0(\sigma)$ eine beliebige Lösung der Volterraschen Integralgleichung (142),

die sich wegen $x_\lambda = 0$ auf die homogene Gleichung

$$\int_0^\alpha V(\alpha\sigma)\,\xi_0(\sigma)\,d\sigma = 0 \tag{149}$$

reduziert[26]).

Man setze ferner für $\nu \neq 0$

$$\xi_\nu(\alpha) = -\frac{i}{\nu}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-\mu}(\alpha)\,\eta_\mu(\alpha), \tag{150}$$

---

[26]) Für den Fall, daß der Kern $V(\alpha\sigma)$ eine analytische Funktion seiner beiden Veränderlichen ist, haben die Herren V. Volterra, E. Holmgren, T. Lalesco und J. Horn Methoden angegeben, die unmittelbar zur Konstruktion der Lösungen der Integralgleichung (149) führen. Nähere Angaben siehe in dem Encyklopädieartikel II C 13 E. Hellinger u. O. Toeplitz: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, S. 1335—1616. Vgl. insbesondere S. 1459—1462. Die Methoden bestehen in geeigneter Benutzung der Theorie der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung, wobei die Zahl $n$ von der Art des Verschwindens der Funktion $V(\alpha,\sigma)$ im Punkte $\alpha = \sigma = 0$ abhängt. Indessen sind die Untersuchungen auch über den analytischen Fall noch nicht zum Abschluß gelangt; doch scheinen einer vollständigen Erledigung des Problems weniger prinzipielle Schwierigkeiten im Wege zu stehen, als vielmehr die Tatsache, daß die Darstellungen für Integrale von linearen homogenen Differentialgleichungen in der Umgebung einer singulären Stelle der Unbestimmtheit, auf die man in den noch unerledigten Fällen geführt wird, noch nicht hinreichend bequem zu handhaben sind. Es liegt aber die Vermutung nahe, daß im analytischen Falle die allgemeine Lösung der singulären Volterraschen Integralgleichung sich ebenso wie das allgemeine Integral einer gewöhnlichen homogenen linearen Differentialgleichung endlicher Ordnung als homogene lineare Verbindung von endlich vielen partikulären Lösungen (vgl. Formel (155) in Abschnitt **66**) darstellen läßt, wobei die Koeffizienten der linearen Verbindung willkürliche Konstanten sind.

Ist $V(\alpha\sigma)$ nicht analytisch, so hat man bisher zur Lösung von (149) nur die Methoden der allgemeinen Theorie linearer Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern zur Verfügung. Es sei die Integralgleichung

$$\int_0^\pi K(\alpha\sigma)\,\xi_0(\sigma)\,d\sigma = 0 \tag{†}$$

vorgelegt, wobei

$$\begin{aligned} K(\alpha\sigma) &= V(\alpha\sigma) \quad \text{für} \quad \sigma \leqq \alpha, \\ K(\alpha\sigma) &= 0 \qquad\quad \text{für} \quad \sigma > \alpha \end{aligned}$$

gesetzt ist. Die Integralgleichung (†) läßt sich am besten nach der E. Schmidtschen Theorie der Paare adjungierter Eigenfunktionen behandeln, die durch das Gleichungspaar

$$\varphi_\nu(\alpha) = \lambda_\nu \int_0^\pi K(\alpha\sigma)\,\psi_\nu(\sigma)\,d\sigma, \qquad \psi_\nu(\alpha) = \lambda_\nu \int_0^\pi K(\sigma\alpha)\,\varphi_\nu(\sigma)\,d\sigma$$

definiert sind. (E. Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Math. Annalen **63** (1907), S. 433—476. Vgl. insbesondere S. 461—465.) Man erhält nunmehr alle Lösungen $\xi_0$ von (†), indem man sämtliche Funktionen konstruiert, die zu allen $\psi_\nu(\alpha)$ orthogonal sind.

wobei die Summe rechter Hand wegen der Konvergenz von $\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} |a_{\nu-\mu}|^2$, $\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} |\eta_\mu|^2$ selbst absolut konvergiert, und bilde endlich

$$(151) \qquad \begin{cases} \xi(\alpha\beta) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \xi_\nu(\alpha)\, e^{i\nu\beta}, \\ \eta(\alpha\beta) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \eta_\nu(\alpha)\, e^{i\nu\beta}; \end{cases}$$

dann läßt sich die durch die Randbedingungen

$$(152) \qquad \eta(0,\beta) = 0, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(\alpha\beta)\, d\beta = \xi_0(\alpha)$$

eindeutig bestimmte Lösung des Systems ($A^*$) § 14 durch die Reihen (151) darstellen.

Die Konvergenz der Reihen (151) schließt man daraus, daß man ja von vornherein sicher ist, daß sich einerseits die Lösung des Systems ($A^*$) unter den Randbedingungen (152) als ein Paar periodischer und stetig differentiierbarer Funktionen in die absolut konvergenten Fourierreihen (151) entwickeln läßt und andererseits die Fourierkoeffizienten $\xi_\nu(\alpha)$ und $\eta_\nu(\alpha)$ dieser Reihen wieder durch die Gleichungen (121) und (122) des § 15 mit der Zusatzbedingung $\eta_\nu(0) = 0$ eindeutig bestimmt sind. Da nach Formel (150) alle $\xi_\nu(\alpha)$ für $\nu \neq 0$ im Punkte $\alpha = 0$ mit den $\eta_\mu(\alpha)$ von selbst verschwinden, so ist die Randbedingung $\xi(0\beta) = 0$ sicher erfüllt, wenn nur $\xi_0(0) = 0$ ist.

Man erhält somit alle Lösungen von ($A^*$), die der Nebenbedingung (126) § 15 und den Randbedingungen $\xi(0\beta) = 0$, $\eta(0\beta) = 0$ genügen, indem man $\xi_0(\alpha)$ alle Lösungen der Gleichung (149) durchlaufen läßt, die für $\alpha = 0$ verschwinden, mit diesen $\xi_0(\alpha)$ die Koeffizienten $\eta_\nu(\alpha)$ nach Formel (148), $\xi_\nu(\alpha)$ nach (150) berechnet und endlich die Reihen (151) für $\xi(\alpha\beta)$ und $\eta(\alpha\beta)$ bildet. Die so konstruierten Funktionenpaare $\xi, \eta$ liefern dann gleichzeitig nach den Ausführungen des Abschnitts **52**, § 14 sämtliche periodische Lösungen des Systems ($L^*$) mit den Randwerten $\xi(0\beta) = 0$, $\eta(0\beta) = 0$ und liefern somit alle Bildflächen $\mathfrak{F}$, deren Meridiankurve $\beta = 2\pi$ mit der Meridiankurve $\beta = 0$ übereinstimmt, d. h. deren Flächen längs ihrer Meridiankurve $\beta = 2\pi$ geschlossen sind.

**66.** Die Konstruktion der periodischen Integrale des Systems von Differentialgleichungen ($L^*$) ist somit auf die Lösung der homogenen Volterraschen Integralgleichung (149) zurückgeführt. Wir bemerken zunächst, daß sich eine partikuläre Lösung von (149) unmittelbar angeben

läßt. Nach einer Bemerkung aus Abschnitt **15**, § 2 ist nämlich

$$\xi(\alpha\beta) = \frac{w_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}, \qquad \eta(\alpha\beta) = \frac{w_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)} \tag{153}$$

eine periodische Lösung des Systems $(L^*)$; da außerdem $\frac{w_\alpha(0,\beta)}{A(0,\beta)} = \frac{w_\beta(0,\beta)}{B(0,\beta)} = 0$ wegen Formel (2) § 1, so ist

$$\xi_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{w_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\, d\beta$$

eine Lösung der Integralgleichung (149). Doch führt diese Lösung nach Abschnitt **15**, § 2 nur zu einer Bildfläche $\mathfrak{F}$, die sich auf einen Punkt zusammenzieht. Andererseits folgt aber nach Volterra[27]) aus der Existenz der von 0 verschiedenen Lösung (153) und (149), daß der Kern $V$ für $\alpha = \sigma = 0$ singulär ist, d. h. aber, daß $V(0,0) = 0$ ist, oder, wenn man in (143) die Summation nach $\lambda$ zuerst ausführt,

$$V(\alpha,\alpha) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha) b_\nu(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)} \frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}\, d\beta,$$

$$V(0,0) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(0) b_\nu(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(0,\beta)}{A(0,\beta)} \frac{A_\beta(0,\beta)}{B(0,\beta)}\, d\beta = 0.$$

Dieses Resultat läßt sich auch aus den Formeln (3), (4), (5) des § **1** unmittelbar ableiten.

Jede Lösung von (149) läßt sich als homogene lineare Verbindung gewisser linear unabhängiger partikulärer Lösungen darstellen:

$$\xi_0 = c_1 \xi_0^{(1)} + c_2 \xi_0^{(2)} + \ldots, \tag{154}$$

wo die $c_\varrho$ willkürliche Konstante bezeichnen. In denjenigen Fällen, in welchen es bisher gelungen ist, die Lösungen von (149) zu konstruieren, ohne sich auf die allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen zweiter Art zu stützen[28]), ist sogar die Anzahl der partikulären Lösungen, aus denen man die allgemeine Lösung aufbaut, endlich; es ist somit

$$\xi_0 = \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \xi_0^{(\varrho)}. \tag{155}$$

---

[27]) V. Volterra, Sulla inversione degli integrali definiti. Rom. Acc. Linc. Rend. 5. Reihe, **5** I (1896), S. 177—185, 284—300. Ann. di mat. 2. Reihe, **25** (1897), S. 137—178.

[28]) Vgl. Fußnote [26]).

Aus (148) und (150) erhält man dann weiter wegen (154) bzw. (155)

$$\eta_\nu^{(\varrho)}(\alpha) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} y_{\nu\lambda}(\alpha) \int_0^\alpha \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} Y_{\lambda\mu}(\sigma)\, b_\mu(\sigma)\, \xi_0^{(\varrho)}(\sigma)\, l\,\sigma,$$

$$\xi_\nu^{(\varrho)}(\alpha) = -\frac{i}{\nu} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-\mu}(\alpha)\, \eta_\mu^{(\varrho)}(\alpha),$$

$$\eta_\nu(\alpha) = \sum_\varrho c_\varrho\, \eta_\nu^{(\varrho)}(\alpha), \qquad \xi_\nu(\alpha) = \sum_\varrho c_\varrho\, \xi_\nu^{(\varrho)}(\alpha),$$

ferner für die Reihen (151)

$$\xi(\alpha\beta) = \sum_\varrho c_\varrho\, \xi^{(\varrho)}(\alpha\beta), \qquad \eta(\alpha\beta) = \sum_\varrho c_\varrho\, \eta^{(\varrho)}(\alpha\beta). \tag{156}$$

**67.** Indem man den Ausdruck (11) des § 2 für $\mathfrak{x}$ nach $\beta$ differenziert und gleichzeitig die Beziehung (6) des § 1: $\mathfrak{x}_\beta = R_2\, \mathfrak{u}_\beta$ berücksichtigt, erhält man nach etwas Rechnung

$$R_2 = \frac{\eta_\beta}{B} + \xi \frac{B_\alpha}{AB} + \zeta. \tag{157}$$

Nach dem Lemma des § 4 ist die Bedingung (21)

$$\lim_{\alpha \to \pi} B(\alpha\beta)\, R_2(\alpha\beta) \to 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß auch die Forderung I erfüllt ist, d. h. daß die Kurve $\mathfrak{x}(\pi, \beta)$ sich auf einen Punkt zusammenzieht, in dem die Bildfläche $\mathfrak{F}$ einen Nabel hat. Da wegen (13) von selbst

$$\lim_{\alpha \to \pi} B(\alpha\beta)\, \zeta(\alpha\beta) \to 0$$

ist, so folgt aus (157) als hinreichende und notwendige Bedingung:

$$\eta_\beta(\pi, \beta) + \frac{B_\alpha(\pi, \beta)}{A(\pi, \beta)}\, \xi(\pi, \beta) = 0$$

oder, wenn man die Formel (156) heranzieht,

$$\sum_\varrho c_\varrho \left( \eta_\beta^{(\varrho)}(\pi, \beta) + \frac{B_\alpha(\pi, \beta)}{A(\pi, \beta)}\, \xi^{(\varrho)}(\pi, \beta) \right) = 0. \tag{158}$$

Diese Gleichung muß identisch in $\beta$ erfüllt sein und liefert eine Bedingung für die Konstanten $c_\varrho$ aus Formel (156), die sich offenbar nur in speziellen Fällen erfüllen läßt. Nachdem die $c_\varrho$ aus Gleichung (158) bestimmt sind, erhält man sämtliche Bildflächen $\mathfrak{F}$ des vorgelegten Problems vom singulären Typus.

**68.** Um zum Schluß noch einige Beispiele von Problemen sphärischer Abbildung vom Haupttypus anzugeben, zeigen wir zunächst, daß die Funktion $G(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)$, die im Abschnitt **22**, § 5 eingeführt wurde, nur im

Hauptfalle in $\beta$ periodisch sein kann. Ist nämlich $G$ in $\beta$ periodisch, so sind nach den Ausführungen im Abschnitt **42**, § 11 auch $R_1$ und $\chi$ periodisch in $\beta$, und zwar bei beliebiger Wahl der Randwerte von $R_1$ für $\beta = \beta_0$. Daraus folgt aber, wie man nach einiger Überlegung leicht einsieht, daß die Integralgleichung (149) für jede einmal stetig differentiierbare Funktion $\xi_0(\alpha)$ erfüllt sein muß, d. h. aber, $V(\alpha\sigma) \equiv 0$, w. z. b. w.[29]).

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß man in dem in § 11 behandelten *Laplaceschen Fall immer ein Problem vom Haupttypus* vor sich hat; denn in Abschnitt **43**, § 11 wurde bewiesen, daß im Laplaceschen Fall die Funktion $G$ in $\beta$ periodisch ist.

**69.** Wir behaupten weiter: Besitzt das vorgegebene Kurvensystem $\mathfrak{S}$ auf der Kugel eine Symmetrieebene, die durch die beiden Pole $S$ und $N$ geht, so ist das zugehörige Problem der sphärischen Abbildung vom Haupttypus.

Es sei somit wieder wie in § 13 die Ebene $v = 0$ Symmetrieebene des Systems $\mathfrak{S}$, und zwar möge diese Ebene die Pole $S$ und $N$ und die Meridiane $\beta = 0$ und $\beta = \pi$ enthalten, die sich zu einem größten Kugelkreis zusammensetzen. Nunmehr erhält man eine Bildfläche $\mathfrak{F}$, die wenigstens der Periodizitätsbedingung (der Forderung II, aber noch nicht notwendig der Forderung I) genügt, indem man sich $R_1$ für $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1 < \pi$ vorgibt und zunächst ein Bildflächenstück $\mathfrak{F}'$ im Bereich $0 \leqq \beta \leqq \pi$, $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ konstruiert. Ebenso wie in Abschnitt **49**, § 13 schließt man, daß die Randkurven $\beta = 0$ und $\beta = \pi$ in einer Ebene $\mathfrak{E}$ gelegen sind, die der Ebene $v = 0$ parallel ist. Daher läßt sich dieses Flächenstück $\mathfrak{F}'$ durch Spiegelung

---

[29]) Die Tatsache, daß $G(\alpha\beta; \alpha_0\beta_0)$ periodisch in $\beta$ ist, läßt sich geradezu als Definition des Hauptfalles benutzen. Man erhält dann unmittelbar eine Integralgleichung für die Periodizitätsbedingung, indem man nach Formel (42) § 6

$$R_1(\alpha, \beta + 2\pi) = R_0 + \int_0^{\alpha} \frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma} G(\sigma, \beta_0 - 2\pi; \alpha\beta)\, d\sigma$$

setzt und dann die Differenz $R_1(\alpha, \beta + 2\pi) - R_1(\alpha\beta)$ bildet. Da man leicht einsieht, daß diese Differenz wegen der Eindeutigkeit des Randwertproblems für das System von Differentialgleichungen (18) des § 4 identisch in $\beta$ verschwindet, wenn sie nur für $\beta = \beta_0$ verschwindet, so ergibt sich als Periodizitätsbedingung die singuläre Volterrasche Integralgleichung

$$(*) \qquad \int_0^{\alpha} (G(\sigma, \beta_0 - 2\pi; \alpha\beta_0) - 1) \frac{\partial R_1(\sigma\beta_0)}{\partial\sigma}\, d\sigma = 0.$$

Auch in (*) wird der Kern nur im Haupttypus identisch verschwinden; indessen erscheint der Kern $G(\sigma, \beta_0 - 2\pi; \alpha\beta_0) - 1$ einer weiteren Analyse schwer zugänglich (vgl. die Entwicklungen der beiden folgenden §§ 19 und 20).

an der Ebene $\mathfrak{E}$ zu einer Bildfläche $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{S}$ ergänzen, die als Rand nur die geschlossene Kurve $\alpha = \alpha_1$ hat, aber bei der vor allem die Meridiankurven $\beta = 0$ und $\beta = 2\pi$ zusammenfallen.

Die Bildfläche $\mathfrak{F}$ genügt mithin der Periodizitätsbedingung bei beliebiger Wahl der Randwerte von $R_1$ für $\beta = 0$. Daraus schließt man aber, ebenso wie in Abschnitt 68, daß die Integralgleichung (149) für jede Funktion $\xi_0(\beta)$ befriedigt sein muß, daß somit auch unter diesen Voraussetzungen $V(\alpha\sigma) \equiv 0$ ist, w. z. b. w.

Die Konstruktion eines Beispiels für ein Kurvensystem $\mathfrak{S}$, bei dem das Problem der spärischen Abbildung vom singulären Typus ist, zu dem aber trotzdem geschlossene konvexe nicht triviale Bildflächen $\mathfrak{F}$ existieren (die weder punktförmig noch kugelförmig sind), führt zu komplizierten Überlegungen [30]).

## § 19.

## Entwicklungen des Kerns im analytischen Fall.

**70.** Bei den Betrachtungen in den beiden folgenden §§ 19 und 20 werde das orthogonale Kurvensystem $\mathfrak{S}$ auf der Kugel ebenso wie in § 10 analytisch vorausgesetzt. Um den Umfang dieser Voraussetzung genau zu formulieren, sei $\mathfrak{B}$ ein Bereich der komplexen $\alpha$-Ebene, der das Stück der reellen Achse $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ ganz in seinem Innern enthält. Dann seien die beiden Funktionen $\frac{B_\alpha}{A}$, $\frac{A_\beta}{B}$ analytisch im $\alpha$ und $\beta$, wenn $\alpha$ dem Bereich $\mathfrak{B}$ und $\beta$ dem Intervall $0 \leqq \beta \leqq 2\pi$ angehört. Daraus folgt unmittelbar, daß die Fourierkoeffizienten $a_\nu(\alpha)$ und $b_\nu(\alpha)$ von $\frac{B_\alpha}{A}$ und $\frac{A_\beta}{B}$ der Formeln (114) § 15 in $\mathfrak{B}$ analytische Funktionen von $\alpha$ sind.

Es mögen nunmehr die Abschätzungen (117) des § 15 bestehen, wenn $\alpha$ in $\mathfrak{B}$ und $\beta$ im Intervall $0 \leqq \beta \leqq 2\pi$ gelegen ist. Dann gelten auch die Abschätzungen (118), (119), (120) des § 15 für den gleichen Bereich.

Betrachten wir ferner die Funktionen der Formeln (123) § 15

$$p_{\nu\varkappa}(\alpha) = -i \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{b_{\nu-\mu}(\alpha)\, a_{\mu-\varkappa}(\alpha)}{\mu},$$

[30]) Verf. hat in zwei Vorträgen am 1. Nov. 1928 und am 31. Okt. 1929 im mathematischen Dozentenkolloquium der Berliner Universität eine allgemeine Methode entwickelt, die zur Konstruktion orthogonaler Kurvensysteme auf der Kugel vom singulären Typus führt. Die Methode benutzt alle wesentlichen Hilfsmittel der vorliegenden Arbeit (Kaskadenmethode, Fourierentwicklung), braucht aber noch einige weitere neue Gedanken. Ihre Veröffentlichung wird in einem zweiten Teil dieser Abhandlung später erfolgen.

dann sind wegen

$$\left|\sum_{\mu=-m_1}^{m_2}{}' \frac{b_{\nu-\mu}\,a_{\mu-\varkappa}}{\mu}\right| \leqq \sqrt{\left(\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}|b_\mu|^2\right)\left(\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}|a_\mu|^2\right)}$$

die Partialsummen der Reihen für $p_{\nu\varkappa}(\alpha)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ gleichmäßig beschränkt, daher konvergieren diese Reihen nach einem bekannten funktionentheoretischen Satz von Vitali[31]) gleichmäßig in jedem Bereich $\mathfrak{B}'$, der ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegen ist, und außerdem sind die $p_{\nu\varkappa}(\alpha)$ in $\mathfrak{B}'$ analytische Funktionen.

Da die Abschätzungen (120) des § 15 für den ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ gelten, so sind auch die Toeplitzschen $L$-Matrizen

$$A=(a_{\nu-\varkappa}), \qquad B=(b_{\nu-\varkappa})$$

in $\mathfrak{B}$ absolut und gleichmäßig beschränkt, und dasselbe gilt dann nach Satz 1 des § 16 für die Produktmatrix der Formel (133) § 17

$$(i\,p_{\nu\varkappa})=BZA.$$

Nach der Definition des § 16 existiert somit eine Konstante $M^*$ derart, daß gleichmäßig in $\mathfrak{B}$ für alle $n_1, n_2, k_1, k_2$

$$\left|\sum_{\nu=-n_1}^{n_2}\sum_{\varkappa=-k_1}^{k_2} p_{\nu\varkappa}\,x_\nu\,y_\varkappa\right| \leqq M^*\sqrt{\left(\sum_{\nu=-n_1}^{n_2}|x_\nu|^2\right)\left(\sum_{k=-k_1}^{k_2}|y_\varkappa|^2\right)} \tag{159}$$

ist. Mithin sind die Voraussetzungen von Satz 5 § 15 für das homogene lineare System von Differentialgleichungen (134) des § 17 sämtlich erfüllt, und daher sind die partikulären Integrale $y_{\nu\lambda}(\alpha)$ des Fundamentalsystems von (134) in jedem Bereich $\mathfrak{B}'$, der ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegen ist, analytische Funktionen von $\alpha$, ebenso wie die Funktionen $Y_{\lambda\mu}(\alpha)$, die Elemente der zu $Y=(y_{\nu\lambda})$ reziproken Matrix $Y^{-1}=(Y_{\lambda\mu})$. Außerdem sind die Matrizen $Y$ und $Y^{-1}$ beide in $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig beschränkt.

**71.** Nunmehr soll gezeigt werden, daß $V(\alpha\sigma)$ eine analytische Funktion von $\alpha$ und von $\sigma$ ist, wenn $\alpha$ und $\sigma$ beide in $\mathfrak{B}'$ gelegen sind. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst die Funktionen

$$Y_\lambda(\sigma)=\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} Y_{\lambda\mu}(\sigma)\,b_\mu(\sigma). \tag{160}$$

Sei $\mathfrak{B}''$ ein Bereich, der ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegen ist, aber seinerseits $\mathfrak{B}'$ ganz im Innern enthält. Dann gelten die Abschätzungen (139) des § 17 gleichmäßig für alle komplexen $\alpha$ des Bereiches $\mathfrak{B}''$. Aus (139) folgt aber für die Partialsummen

$$\left|\sum_{\mu=-m_1}^{m_2} Y_{\lambda\mu}(\sigma)\,b_\mu(\sigma)\right| \leqq K\sqrt{\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}|b_\mu(\sigma)|^2} \leqq K\,M$$

[31]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 1 (1921), S. 165—171.

wegen (118) § 15. Da somit die Partialsummen der Reihen (160) in $\mathfrak{B}''$ gleichmäßig beschränkt sind, so konvergieren die Reihen (160) nach dem Vitalischen Satze in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{B}''$ gelegenen Bereich $\mathfrak{B}'''$ gleichmäßig gegen eine dort analytische Funktion.

Es ist

$$V(\alpha\sigma) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} y_{\nu\lambda}(\alpha)\, a_{-\nu}(\alpha)\, Y_\lambda(\sigma)$$

Für die Partialsummen dieser Doppelreihe gilt nun aber gleichmäßig in $\mathfrak{B}''$ die Abschätzung (141) des § 17. Ist jetzt $\mathfrak{B}'''$ so gewählt, daß $\mathfrak{B}'$ ganz im Innern von $\mathfrak{B}'''$ gelegen ist, so ist nach dem Vitalischen Satze $V(\alpha\sigma)$ analytisch in $\alpha$ und $\sigma$, wenn beide Größen in $\mathfrak{B}'$ gelegen sind.

Setzt man noch

$$y_\lambda(\alpha) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha), \tag{161}$$

so sind die $y_\lambda$ ebenso wie die $Y_\lambda$ analytische Funktionen in $\mathfrak{B}'''$, und es ergibt sich

$$V(\alpha\sigma) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} y_\lambda(\alpha)\, Y_\lambda(\sigma). \tag{162}$$

**72.** Um diese Funktion in eine Potenzreihe zu entwickeln, müssen wir die Ableitungen von $V$ nach $\alpha$ und $\sigma$ berechnen. Zu diesem Zwecke führe man zunächt eine Folge von Funktionen $A_{\varrho\nu}(\alpha)$, $B_{\varrho\nu}(\alpha)$, $0 \leqq \varrho < \infty$, $-\infty < \nu < +\infty$ ein, die man durch die Rekursionsformeln

$$A_{0\nu}(\alpha) = a_\nu(\alpha), \quad A_{\varrho+1,\nu}(\alpha) = \frac{dA_{\varrho\nu}(\alpha)}{d\alpha} + \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho\varkappa}(\alpha)\, p_{-\varkappa,-\nu}(\alpha) \tag{163}$$

$$B_{0\nu}(\alpha) = b_\nu(\alpha), \quad B_{\varrho+1,\nu}(\alpha) = \frac{dB_{\varrho\nu}(\alpha)}{d\alpha} - \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} B_{\varrho\varkappa}(\alpha)\, p_{\nu\varkappa}(\alpha) \tag{164}$$

definiert. Von den Funktionen $A_{\varrho\nu}$ und $B_{\varrho\nu}$ behaupten wir zweierlei:

**1.** *Die Reihen* $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |A_{\varrho\nu}|^2$, $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |B_{\varrho\nu}|^2$ *sind für jedes* $\varrho$ *in* $\mathfrak{B}'$ *konvergent und liegen dort unter einer zwar von* $\varrho$, *aber nicht von* $\alpha$ *abhängigen Schranke* $C_\varrho^2$ [32]:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |A_{\varrho\nu}|^2 \leqq C_\varrho^2, \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |B_{\varrho\nu}|^2 \leqq C_\varrho^2. \tag{165}$$

**2.** *Die Funktionen* $A_{\varrho\nu}$, $B_{\varrho\nu}$ *sind analytische Funktionen von* $\alpha$ *in jedem Bereich* $\mathfrak{B}'$, *der ganz Inneren von* $\mathfrak{B}$ *gelegen ist.*

[32]) Die Konvergenz dieser beiden Reihen ist schon notwendig, um überhaupt die unendlichen Reihen in Formel (163) und (164) bilden zu können.

**73.** Dem Beweise dieser beiden Behauptungen schicken wir einen einfachen Hilfssatz voraus:

Lemma. *Es sei eine unendliche Folge von Funktionen* $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots$ *vorgelegt, die sämtlich in* $\mathfrak{B}$ *regulär analytisch sind, und es sei außerdem in* $\mathfrak{B}$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(\alpha)|^2 \leqq M^2.$$

*Dann gilt in jedem Punkte* $\alpha$ *eines Bereiches* $\mathfrak{B}'$ *im Inneren von* $\mathfrak{B}$ *die Abschätzung*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{df_\nu(\alpha)}{d\alpha} \right|^2 \leqq \frac{l^2 M^2}{4\pi^2 \delta^2},$$

*wenn* $l$ *die Länge des Randes* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{B}$ *und* $\delta$ *die kürzeste Entfernung des Randes von* $\mathfrak{B}'$ *vom Rande* $\mathfrak{C}$ *bezeichnet.*

Beweis. Nach der Cauchyschen Integralformel ist für jeden Punkt $\alpha$ von $\mathfrak{B}'$

$$\frac{df_\nu(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f_\nu(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^2} d\zeta$$

und folglich

$$\left| \frac{df_\nu(\alpha)}{d\alpha} \right|^2 \leqq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{C}} \frac{|f_\nu(\zeta_1)|}{|\zeta_1-\alpha|^2} \frac{|f_\nu(\zeta_2)|}{|\zeta_2-\alpha|^2} |d\zeta_1| |d\zeta_2|. \tag{166}$$

Nun ist aber auf $\mathfrak{C}$ für jedes $n$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(\zeta_1)| |f_\nu(\zeta_2)| \leqq \sqrt{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(\zeta_1)|^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(\zeta_2)|^2\right)} \leqq M^2$$

und man erhält somit wegen (166)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{df_\nu(\alpha)}{d\alpha} \right|^2 &\leqq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{C}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|f_\nu(\zeta_1)|}{|\zeta_1-\alpha|^2} \frac{|f_\nu(\zeta_2)|}{|\zeta_2-\alpha|^2} |d\zeta_1| |d\zeta_2| \\ &\leqq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{C}} \frac{M^2}{|\zeta_1-\alpha|^2 |\zeta_2-\alpha|^2} |d\zeta_1| |d\zeta_2| \leqq \frac{l^2 M^2}{4\pi^2 \delta^4}. \end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für jedes $n$ gilt, wofern $\alpha$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{B}'$ ist, so gilt sie auch im Grenzfall $n \to \infty$, und damit ist das Lemma bewiesen.

**74.** Indem wir nunmehr zum Beweise der beiden in Abschnitt **72** formulierten Behauptungen **1** und **2** übergehen, benutzen wir den allgemeinen Induktionsschluß von $\varrho$ auf $\varrho+1$. Denn beide Behauptungen sind für $\varrho = 0$ sicher richtig, da nach Formel (118) § 15 in $\mathfrak{B}$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |A_{0\nu}|^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |a_\nu|^2 \leqq M^2, \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |B_{0\nu}|^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |b_\nu|^2 \leqq M^2$$

ist und außerdem sämtliche Funktionen $A_{0\nu} = a_\nu$ und $B_{0\nu} = b_\nu$ in $\mathfrak{B}$ analytisch sind. Es genügt somit, die beiden Behauptungen für $\varrho + 1$ zu beweisen, unter der Annahme, daß sie bereits für $\varrho$ als richtig erkannt sind.

Beweis von **1.** Es sei wieder $\mathfrak{B}''$ ein Bereich ganz im Inneren von $\mathfrak{B}$, der seinerseits $\mathfrak{B}'$ im Inneren enthält, und es mögen in $\mathfrak{B}''$ die Abschätzungen (165) für ein gewisses festes $\varrho$ gelten. Dann ist nach Formel (163)

$$(167)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |A_{\varrho+1,\nu}|^2 \leqq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left( \left| \frac{dA_{\varrho\nu}}{d\alpha} \right| + \left| \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho\varkappa} p_{-\varkappa,-\nu} \right| \right)^2$$

$$\leqq 2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dA_{\varrho\nu}}{d\alpha} \right|^2 + \left| \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho\varkappa} p_{-\varkappa,-\nu} \right|^2.$$

Wegen (165) folgt aber aus dem Lemma des Abschnits **73**, daß in $\mathfrak{B}'$

$$(168)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dA_{\varrho\nu}}{d\alpha} \right|^2 \leqq \frac{l^2 C_\varrho^2}{4\pi^2 \delta^4}.$$

Aus (159) folgt andererseits nach einem elementaren Satze aus der Theorie der beschränkten Matrizen [33])

$$(169)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho\varkappa} p_{-\varkappa,-\nu} \right|^2 \leqq M^{*2} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} |A_{\varrho\varkappa}|^2 \leqq M^{*2} C_\varrho^2.$$

Die Abschätzungen (168) und (169) zeigen aber wegen (167), daß $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |A_{\varrho+1,\nu}|^2$ in $\mathfrak{B}'$ beschränkt ist.

Der Beweis für die Beschränktheit der Reihe $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |B_{\varrho+1,\nu}|^2$ wird ebenso geführt. Und damit ist die Behauptung **1** vollständig bewiesen.

Beweis von **2.** Es werde vorausgesetzt, daß alle $A_{\varrho\nu}$ und $B_{\varrho\nu}$ in $\mathfrak{B}''$ regulär analytisch sind und dort die Abschätzungen (165) gelten. Dann ist auch $\frac{dA_{\varrho\nu}}{d\alpha}$ in $\mathfrak{B}''$ regulär analytisch. Außerdem folgt aus (159) und (165) für jedes $\alpha$ aus $\mathfrak{B}''$

$$\left| \sum_{\varkappa=-k_1}^{k_2} A_{\varrho\varkappa} p_{-\varkappa,-\nu} \right| \leqq M^* C_\varrho.$$

Da somit die Partialsummen der Reihe $\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho\varkappa} p_{-\varkappa,-\nu}$ in $\mathfrak{B}''$ gleichmäßig beschränkt sind, so konvergiert diese Reihe nach dem Vitalischen Satze gleichmäßig in $\mathfrak{B}'$ gegen eine dort reguläre analytische Funktion. Man

[33]) Siehe loc. cit. Fußnote [21]), vgl. insb. S. 301.

ersieht nunmehr aus (163) unmittelbar, daß die $A_{\varrho+1,\nu}$ in $\mathfrak{B}'$ analytisch sind. Ebenso wird der Beweis für die Funktionen $B_{\varrho+1,\nu}$ geführt. Damit ist auch die Behauptung **2** vollständig bewiesen.

**75.** Nunmehr behaupten wir: Es ist

$$\frac{d^\varrho y_\lambda}{d\alpha^\varrho} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho,-\nu} y_{\nu\lambda}, \tag{170}$$

$$\frac{d^\varrho Y_\lambda}{d\alpha^\varrho} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} B_{\varrho\mu} Y_{\lambda\mu}, \tag{171}$$

wenn unter $y_\lambda$ und $Y_\lambda$ die Funktionen der Formeln (161), (160) verstanden werden.

Beweis. Die Formeln (170) und (171) sind für $\varrho = 0$ sicher richtig, da sie dann mit den Formeln (161) und (160) übereinstimmen. Wir suchen daher Formel (170) durch Schluß von $\varrho$ auf $\varrho+1$ zu beweisen und gehen von der Annahme aus, daß die Formel (170) bereits für ein festes $\varrho$ verifiziert ist.

Nunmehr differentiieren wir die Reihe rechter Hand von (170) gliedweise nach $\alpha$ und erhalten so

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{d(A_{\varrho,-\nu} y_{\nu\lambda})}{d\alpha} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{dA_{\varrho,-\nu}}{d\alpha} y_{\nu\lambda} + A_{\varrho,-\nu} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} p_{\nu\varkappa} y_{\varkappa\lambda} \right), \tag{172}$$

indem man für $\frac{dy_{\nu\lambda}}{d\alpha}$ die Reihen aus Formel (134), § 17 substituiert. Um nun noch nachzuweisen, daß in der Reihe linker Hand von (172) Summation und Differentiation vertauschbar sind, haben wir zu zeigen, daß die Reihe rechter Hand von (172) in $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig konvergiert. Es ist nun aber nach Formel (159) in $\mathfrak{B}''$

$$\left| \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} \left( \frac{dA_{\varrho,-\nu}}{d\alpha} y_{\nu\lambda} + A_{\varrho,-\nu} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} p_{\nu\varkappa} y_{\varkappa\lambda} \right) \right|$$

$$\leqq \sqrt{\left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dA_{\varrho,-\nu}}{d\alpha} \right|^2 \right) \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |y_{\nu\lambda}|^2 \right)} + M^* \sqrt{\left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |A_{\varrho,-\nu}|^2 \right) \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |y_{\varkappa\lambda}|^2 \right)}$$

$$\leqq K C_\varrho \left( \frac{l}{2\pi\delta^2} + M^* \right)$$

wegen (139), (165) und (168). Da die Partialsummen der Reihen rechter Hand von (172) in $\mathfrak{B}''$ gleichmäßig beschränkt sind, so konvergiert diese Reihe nach dem Vitalischen Satze gleichmäßig in $\mathfrak{B}'$ gegen eine dort reguläre analytische Funktion. Nachdem somit die Vertauschung von Differentiation und Summation in der Reihe linker Hand gerechtfertigt ist, er-

gibt sich

$$\frac{d^{\varrho+1} y_\lambda}{d\alpha^{\varrho+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{d A_{\varrho,-\nu}}{d\alpha} y_{\nu\lambda} + A_{\varrho,-\nu} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} p_{\nu\varkappa} y_{\varkappa\lambda}.$$

Nun ist aber nach einem bekannten Satze aus der Theorie der beschränkten unendlichen Bilinearformen [34])

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho,-\nu} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} p_{\nu\varkappa} y_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} y_{\nu\lambda} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho,-\varkappa} p_{\varkappa\nu}.$$

Mithin erhält man schließlich

$$\frac{d^{\varrho+1} y_\lambda}{d\alpha^{\varrho+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} y_{\nu\lambda} \left( \frac{d A_{\varrho,-\nu}}{d\alpha} + \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho\varkappa} p_{-\varkappa,\nu} \right) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho+1,-\nu} y_{\nu\lambda}$$

wegen Formel (163); w. z. b. w.

Ebenso wird der Beweis für die Formeln (171) geführt, indem man nur für die Differentialquotienten $\frac{d Y_{\lambda\mu}}{d\alpha}$ die Reihen der Formeln (135), § 17 substituiert.

**76.** Wenn man die Reihe rechter Hand von (162) mehrfach gliedweise nach $\alpha$ und nach $\sigma$ differentiiert, so ergibt sich

$$(173) \quad \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{\varrho_1+\varrho_2} y_\lambda(\alpha)\, Y_\lambda(\sigma)}{\partial\alpha^{\varrho_1}\, \partial\sigma^{\varrho_2}} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1,-\nu}(\alpha) y_{\nu\lambda}(\alpha) \right) \left( \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} B_{\varrho_2,\mu}(\sigma) Y_{\lambda\mu}(\sigma) \right).$$

Es ist nun aber, wenn $\alpha$ in $\mathfrak{B}''$ gelegen ist,

$$\left| \sum_{\lambda=-l_1}^{l_2} \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1,-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha) \right) \left( \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} B_{\varrho_2,\mu}(\sigma)\, Y_{\lambda\mu}(\sigma) \right) \right|$$

$$\leqq \sqrt{\left( \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1,-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha) \right|^2 \right) \left( \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} B_{\varrho_2,\mu}(\sigma)\, Y_{\lambda\mu}(\sigma) \right|^2 \right)}$$

$$\leqq \sqrt{\left( K^2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| A_{\varrho_1,\nu}(\alpha) \right|^2 \right) \left( K^2 \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left| B_{\varrho_2,\mu}(\sigma) \right|^2 \right)} \text{ wegen (140)}$$

$$\leqq K^2 C_{\varrho_1} C_{\varrho_2} \text{ wegen (165)}.$$

Mithin sind die Partialsummen der Reihen rechter Hand von (173) in $\mathfrak{B}''$ gleichmäßig beschränkt, und daher konvergiert diese Reihe nach dem Vitalischen Satze gleichmäßig in $\mathfrak{B}'$ gegen eine dort reguläre analytische Funktion. Es läßt sich daher in der Reihe linker Hand von (173) Summation und Differentiation vertauschen, und man erhält schließlich die fundamentale Formel

$$(174) \quad \frac{\partial^{\varrho_1+\varrho_2} V(\alpha\sigma)}{\partial\alpha^{\varrho_1}\, \partial\sigma^{\varrho_2}} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1,-\nu}(\alpha)\, y_{\nu\lambda}(\alpha) \right) \left( \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} B_{\varrho_2,\mu}(\sigma)\, Y_{\lambda\mu}(\sigma) \right).$$

[34]) Vgl. loc. cit. Fußnote [21]), vgl. insbesondere S. 297–299.

In den mehrfachen Reihen rechter Hand ist aber nach den Hilbertschen Faltungssätzen[35]) die Reihenfolge der Summation vertauschbar. Mithin ergibt sich, wenn man in (174) $\sigma = \alpha$ setzt, die Summation nach $\lambda$ zuerst ausführt und außerdem berücksichtigt, daß $(Y_{\lambda\mu})$ die reziproke Matrix von $(y_{\nu\lambda})$ ist,

$$\frac{\partial^{\varrho_1+\varrho_2} V(\alpha\sigma)}{\partial\alpha^{\varrho_1}\partial\sigma^{\varrho_2}}\Big/_{\sigma=\alpha} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1,-\nu}(\alpha)\, B_{\varrho_2,\nu}(\alpha)\,. \tag{175}$$

Nun ist aber nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$\begin{aligned} V(\alpha\sigma) &= \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\partial^{\varrho} V(\alpha\sigma)}{\partial\sigma^{\varrho}}\Big/_{\sigma=\alpha} \frac{(\sigma-\alpha)^{\varrho}}{\varrho!} \\ &= \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\partial^{\varrho} V(\alpha\sigma)}{\partial\alpha^{\varrho}}\Big/_{\alpha=\sigma} \frac{(\alpha-\sigma)^{\varrho}}{\varrho!} \\ &= \sum_{\varrho_1=0}^{\infty}\sum_{\varrho_2=0}^{\infty} \frac{\partial^{\varrho_1+\varrho_2} V(\alpha\sigma)}{\partial\alpha^{\varrho_1}\partial\sigma^{\varrho_2}}\Big/_{\alpha=\sigma=\alpha_1} \frac{(\alpha-\alpha_1)^{\varrho_1}}{\varrho_1!}\,\frac{(\sigma-\alpha_1)^{\varrho_2}}{\varrho_2!}\,, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_1$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{B}'$ ist, und hieraus ergibt sich, wenn man für die partiellen Ableitungen von $V$ ihre Werte aus (175) substituiert,

$$\boxed{\begin{aligned} V(\alpha\sigma) &= \sum_{\varrho=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, B_{\varrho\nu}(\alpha)\Big)\frac{(\sigma-\alpha)^{\varrho}}{\varrho!} \\ &= \sum_{\varrho=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_{\nu}(\sigma)\, A_{\varrho,-\nu}(\sigma)\Big)\frac{(\alpha-\sigma)^{\varrho}}{\varrho!} \\ &= \sum_{\varrho_1=0}^{\infty}\sum_{\varrho_2=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1,-\nu}(\alpha_1)\, B_{\varrho_2,\nu}(\alpha_1)\Big)\frac{(\alpha-\alpha_1)^{\varrho_1}}{\varrho_1!}\,\frac{(\sigma-\alpha_1)^{\varrho_2}}{\varrho_2!} \end{aligned}}\,.$$

Daraus folgt aber der

Satz. *Ist das vorgegebene orthogonale Kurvensystem $\mathfrak{S}$ auf der Kugel analytisch, so ist hinreichend für den Hauptfall, daß entweder die Gleichungen*

$$\boxed{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, B_{\varrho\nu}(\alpha) = 0} \tag{176}$$

*oder aber die Gleichungen*

$$\boxed{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_{\nu}(\alpha)\, A_{\varrho,-\nu}(\alpha) = 0} \tag{177}$$

[35]) Vgl. etwa loc. cit. Fußnote [21]) S. 301 und 302.

*für alle* $\varrho \geqq 0$ *identisch in* $\alpha$ *erfüllt sind. Außerdem ist auch hinreichend, daß die Beziehungen*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1,-\nu}(\alpha)\, B_{\varrho_2,\nu}(\alpha) = 0 \tag{178}$$

*in einem einzigen Punkte* $\alpha = \alpha_1$ *von* $\mathfrak{B}'$ *für alle* $\varrho_1 \geqq 0$ *und für alle* $\varrho_2 \geqq 0$ *befriedigt sind. Dagegen ist notwendig, daß die Beziehungen* (176), (177) *und* (178) *sämtlich identisch in* $\alpha$ *gelten.*

Man verifiziert endlich leicht die Gleichungen

$$\frac{d^k}{d\alpha^k}\Big(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1,-\nu}(\alpha)\, B_{\varrho_2,\nu}(\alpha)\Big) = \sum_{\varkappa=0}^{k}\binom{k}{\varkappa}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\varrho_1+\varkappa,-\nu}(\alpha)\, B_{\varrho_2+k-\varkappa,\nu}(\alpha)$$

die den Zusammenhang zwischen den hinreichenden Bedingungen (178) einerseits und (176), (177) andererseits erkennen lassen.

## § 20.

## Noch einmal die Laplacesche Kaskadenmethode.

**77.** Ebenso wie wir in Abschnitt **35**, § 9 formale Reihen betrachtet haben, die das System (L*) befriedigen, so wollen wir hier die formalen Lösungen des Systems ($\Lambda^*$) untersuchen. Auch diese nach den Methoden der §§ 8 und 9 konstruierten formalen Lösungen von ($\Lambda^*$) werden sich mit Hilfe der in den Formeln (164) eingeführten Funktionen $B_{\varrho\nu}(\alpha)$ darstellen lassen.

Man setze

$$\begin{cases} \Sigma_1 \sim \chi_0(\alpha)\dfrac{d\varphi_0(\alpha)}{d\alpha} + \sum\limits_{\varrho=0}^{\infty}\xi_\varrho(\alpha\beta)\,\varphi_\varrho(\alpha), \\ \Sigma_2 \sim \sum\limits_{\varrho=0}^{\infty}\eta_\varrho(\alpha\beta)\,\varphi_\varrho(\alpha), \end{cases} \tag{179}$$

wobei die $\varphi_\varrho(\alpha)$ wieder wie in den §§ 8 und 9 den Beziehungen (52) § 8 genügen. Dann sind die Reihen $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ ein formales Lösungspaar des Systems ($\Lambda^*$), wenn ihre Koeffizienten durch die Rekursionsformeln

$$\eta_0(\alpha\beta) = \chi_0(\alpha)\frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}, \tag{180}$$

$$\xi_\varrho(\alpha\beta) = \chi_{\varrho+1}(\alpha) + \int_0^\beta \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\,\eta_\varrho(\alpha\tau)\,d\tau - \frac{\beta}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\,\eta_\varrho(\alpha\tau)\,d\tau, \tag{181}$$

$$\eta_{\varrho+1}(\alpha\beta) = \frac{A_\beta(\alpha\beta)}{B(\alpha\beta)}\,\xi_\varrho(\alpha\beta) - \frac{\partial\eta_\varrho(\alpha\beta)}{\partial\alpha} \tag{182}$$

bestimmt sind. Hierbei bezeichnen ebenso wie in den §§ 8 und 9 die $\chi_\varrho(\alpha)$ willkürliche analytische Funktion von $\alpha$. Eine mit (181) gleich bedeutende

Rekursionsformel erhält man durch Differentiation von (181) nach $\beta$:

$$\frac{\partial \xi_\varrho(\alpha\beta)}{\partial \beta} = \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\eta_\varrho(\alpha\beta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\tau)}{A(\alpha\tau)}\eta_\varrho(\alpha\tau)\,d\tau. \tag{183}$$

Durch Schluß von $\varrho$ auf $\varrho+1$ erkennt man unmittelbar aus den Formeln (180), (181), (182), daß alle Funktionen $\xi_\varrho(\alpha\beta)$ und $\eta_\varrho(\alpha\beta)$ in $\beta$ periodisch sind.

Sind $\xi_\varrho$, $\eta_\varrho$ und $\xi_\varrho^*$, $\eta_\varrho^*$ zwei verschiedene Koeffizientenfolgen, die aber beide zu Lösungen $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ bzw. $\Sigma_1^*$, $\Sigma_2^*$ von $(\Lambda^*)$ gehören, so hängen ebenso wie in Abschnitt **35**, § 9 Formel (70) die $\xi_\varrho^*$, $\eta_\varrho^*$ mit den $\xi_\varrho$, $\eta_\varrho$ durch die Beziehungen

$$\begin{cases} \xi_\varrho^* = [1, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\varrho]_\alpha, \\ \eta_\varrho^* = \quad [\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_\varrho]_\alpha \end{cases} \tag{184}$$

zusammen.

**78.** Ebenso wie bei dem System $(L^*)$ in Abschnitt **37**, § 9 sagen wir, das System $(\Lambda^*)$ ist in bezug auf $\alpha$ nach Laplace integrabel, wenn endliche Reihen

$$\xi(\alpha\beta) = \frac{d\varphi_0(\alpha)}{d\alpha} + \sum_{\varrho=0}^{n} \tilde{\xi}_\varrho(\alpha\beta)\varphi_\varrho(\alpha),$$

$$\eta(\alpha\beta) = \sum_{\varrho=0}^{n} \tilde{\eta}_\varrho(\alpha\beta)\varphi_\varrho(\alpha)$$

existieren, die ein Integral des Systems $(\Lambda^*)$ liefern. Ist im Laplaceschen Falle $\xi_\varrho$, $\eta_\varrho$ eine beliebige Koeffizientenfolge, die zu einer formalen Lösung $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ von $(\Lambda^*)$ gehört, so gelten auch hier wegen (184) die Beziehungen

$$\left.\begin{cases} \xi_\varrho = [1, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]_\alpha \\ \eta_\varrho = \quad [\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n]_\alpha \end{cases}\right\} \quad \text{für} \quad \varrho \geqq n. \tag{185}$$

Dieser Satz ist auch umkehrbar: Ist für ein einziges $\varrho \geqq n+1$

$$\eta_\varrho = [\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n]_\alpha,$$

so ist das System $(\Lambda^*)$ in bezug auf $\alpha$ nach Laplace integrabel.

In Abschnitt **81**, dieses Paragraphen werden wir schließlich beweisen: Ist das System $(L^*)$ vom Laplaceschen Typus, so ist auch das System $(\Lambda^*)$ in bezug auf $\alpha$ nach Laplace integrabel. Dagegen ist die Umkehrung nicht richtig, denn es kann sehr wohl das System $(\Lambda^*)$ nach Laplace integrabel sein, ohne das ein gleiches für das System $(L^*)$ gilt.

**79.** Setzt man in den Formeln (180), (181), (182) $\chi_0(\alpha) = 1$, alle übrigen $\chi_\varrho(\alpha) = 0$ $(\varrho \geqq 1)$, so läßt sich die Konvergenz der Reihen (179) beweisen; doch wird dieser Umstand im folgenden nicht benutzt. Wir kon-

struieren hier vielmehr eine spezielle Koeffizientenfolge $\hat{\xi}_\varrho, \hat{\eta}_\varrho$, indem wir die willkürlichen Funktionen $\chi_\varrho(\alpha)$ derart bestimmen, daß

$$\int_0^{2\pi} \hat{\xi}_\sigma(\alpha\beta)\, d\beta = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \infty \tag{186}$$

wird. Wenn man (181) nach $\beta$ im Intervall $0 \leqq \beta \leqq 2\pi$ integriert, so ergeben sich aus den Bedingungen (186) für die $\chi_\varrho(\alpha)$ die Rekursionsformeln

$$\hat{\chi}_0(\alpha) = 1,$$
$$\hat{\chi}_{\varrho+1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\beta - \pi) \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)} \hat{\eta}_\varrho(\alpha\beta)\, d\beta,$$

die die Funktionen $\hat{\chi}_\varrho(\alpha)$ und damit auch die Folge der Koeffizienten $\hat{\xi}_\varrho, \hat{\eta}_\varrho$ eindeutig festlegen.

Nun sind aber die Koeffizienten $\hat{\xi}_\varrho, \hat{\eta}_\varrho$, wie alle Koeffizienten $\xi_\varrho, \eta_\varrho$, die aus den Formeln (180), (181), (182) hervorgehen, periodische Funktionen von $\beta$ und lassen sich mithin in Fourierreihen

$$\begin{cases} \hat{\xi}_\varrho(\alpha\beta) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \hat{\xi}_{\varrho\nu}(\alpha)\, e^{i\nu\beta}, \\ \hat{\eta}_\varrho(\alpha\beta) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \hat{\eta}_{\varrho\nu}(\alpha)\, e^{i\nu\beta} \end{cases} \tag{187}$$

entwickeln. Hierbei ist wegen (186) $\hat{\xi}_{\varrho 0} = 0$ für alle $\varrho$. Für die Fourierkoeffizienten $\hat{\xi}_{\varrho\nu}(\alpha)$, $\hat{\eta}_{\varrho\nu}(\alpha)$ erhält man nun aber neue Rekursionsformeln, wenn man die Reihen (187) in die Beziehungen (180), (183) und (182) einsetzt und dann entsprechende Koeffizienten der durch diese Substitution gebildeten Fourierreihen einander gleichsetzt. Es ergibt sich somit

$$\hat{\eta}_{0\nu}(\alpha) = b_\nu(\alpha), \tag{188}$$

$$i\nu\, \hat{\xi}_{\varrho\nu}(\alpha) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-\varkappa}\, \hat{\eta}_{\varrho\varkappa}(\alpha), \tag{189}$$

$$\hat{\eta}_{\varrho+1,\nu}(\alpha) = -\frac{d\hat{\eta}_{\varrho,\nu}(\alpha)}{d\alpha} + \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} b_{\nu-\mu}(\alpha)\, \hat{\xi}_{\varrho\mu}(\alpha). \tag{190}$$

Die Reihen rechter Hand von (189) und (190) sind offenbar absolut konvergent. Berücksichtigt man, daß in der Summe rechter Hand von (190) $\hat{\xi}_{\varrho 0} = 0$ ist für alle $\varrho$, so läßt sich für $\mu \neq 0$ in (190) für $\hat{\xi}_{\varrho\mu}(\alpha)$ die Reihe (189) substituieren und es ergibt sich

$$\hat{\eta}_{\varrho+1,\nu}(\alpha) = -\frac{d\hat{\eta}_{\varrho\nu}}{d\alpha} + {\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}}' \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{\nu-\mu}(\alpha)\, a_{\mu-\varkappa}(\alpha)}{i\mu}\, \hat{\eta}_{\varrho\varkappa}(\alpha)\ ^{36}). \tag{191}$$

[36]) Über die Bedeutung des Striches hinter dem $\Sigma$-Zeichen s. Fußnote [18]) § 15 S. 679.

Da auch die Doppelreihe auf der rechten Seite von (191) absolut konvergiert, so läßt sich die Reihenfolge der Summation nach $\mu$ und $\varkappa$ vertauschen, und man erhält endlich, wenn man die Summation nach $\mu$ zuerst ausführt und Formel (123) § 15 berücksichtigt:

$$\hat{\eta}_{\varrho+1,\nu}(\alpha) = -\frac{d\hat{\eta}_{\varrho\nu}}{d\alpha} + \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} p_{\nu\varkappa}(\alpha)\,\hat{\eta}_{\varrho\varkappa}(\alpha). \tag{192}$$

Vergleicht man die Formeln (188) und (192) mit den Rekursionsformeln (164) des § 19, so bemerkt man unmittelbar, daß

$$\hat{\eta}_{\varrho\nu} = (-1)^{\varrho} B_{\varrho\nu}$$

ist. Setzt man diesen Wert für $\hat{\eta}_{\varrho\nu}$ in (187) ein, so ergibt sich weiter

$$\hat{\xi}_{\varrho 0}(\alpha) = 0,$$

$$\hat{\xi}_{\varrho\nu}(\alpha) = \frac{(-1)^{\varrho}}{i\nu} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-\varkappa}(\alpha)\, B_{\varrho\varkappa}(\alpha)$$

und für die Koeffizientenfolge $\hat{\xi}_{\varrho}$, $\hat{\eta}_{\varrho}$ der Laplaceschen Reihen $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ erhält man die Fourrierreihen

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\xi}_{\varrho}(\alpha\beta) &= (-1)^{\varrho} {\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}}' \Big(\frac{1}{i\nu} \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} a_{\nu-\varkappa}(\alpha)\, B_{\varrho\varkappa}(\alpha)\Big) e^{i\nu\beta}, \\ \hat{\eta}_{\varrho}(\alpha\beta) &= (-1)^{\varrho} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} B_{\varrho\nu}(\alpha)\, e^{i\nu\beta}. \end{aligned}} \tag{193}$$

**80.** Aus dieser neuen Deutung der im vorigen Paragraphen konstruierten Funktionen $B_{\varrho\nu}(\alpha)$ lassen sich eine Reihe wichtiger Folgerungen ziehen. Nach dem Lehrsatz des Abschnitts **76**, § 19 sind die Beziehungen

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{-\nu}(\alpha)\, B_{\varrho\nu}(\alpha) = 0 \qquad (0 \leqq \varrho < \infty) \tag{194}$$

für den Hauptfall hinreichend und notwendig. Wegen (193) sind aber diese Gleichungen mit den Beziehungen

$$\int_0^{2\pi} \frac{B_{\alpha}(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)}\, \hat{\eta}_{\varrho}(\alpha\beta)\, d\beta = 0 \qquad (0 \leqq \varrho < \infty)$$

gleichbedeutend. Da aber für jede Koeffizientenfolge $\xi_{\varrho}$, $\eta_{\varrho}$ wegen (184)

$$\eta_{\varrho} = [\hat{\eta}_0, \hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_{\varrho}]_{\alpha}$$

gilt, so ist bei beliebigem $\xi_\varrho$, $\eta_\varrho$

$$\int_0^{2\pi} \frac{B_\alpha(\alpha\beta)}{A(\alpha\beta)} \eta_\varrho(\alpha\beta)\, d\beta = 0 \qquad (0 \leqq \varrho < \infty);$$

das heißt aber, das letzte Integralglied auf der rechten Seite von (181) verschwindet im Hauptfalle immer. Dann stimmen aber die Formeln (180), (181), (182) mit den Rekursionsformeln (69) des § 9 überein, und die mit den Koeffizientenfolgen $\xi_\varrho$, $\eta_\varrho$ gebildeten Reihen $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ sind mithin im Hauptfall gleichzeitig Lösungen der Systeme $(A^*)$ und $(L^*)$.

**81.** Es sei nunmehr das System $(A^*)$ in bezug auf $\alpha$ nach Laplace integrabel, dann ist nach (185)

$$\hat{\eta}_\varrho = [\hat{\eta}_0, \hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_n]_\alpha \quad \text{für} \quad \varrho \geqq n.$$

Setzt man für die Funktionen $\hat{\eta}$ die Reihen aus Formel (193) ein, so ergibt sich eine lineare Abhängigkeit der Fourierkoeffizienten, die sich in der Form

$$(195) \qquad \boxed{B_{\varrho\nu}(\alpha) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \chi_{\varrho\varkappa}(\alpha) B_{\varkappa\nu}(\alpha) \quad \begin{pmatrix} \varrho \geqq n \\ -\infty < \nu < +\infty \end{pmatrix}}$$

schreiben läßt. Hierbei bezeichnen die $\chi_{\varrho\varkappa}(\alpha)$ geeignet bestimmte Funktionen von $\alpha$. Nach der Bemerkung in Abschnitt 78 läßt sich aber dieser Satz auch umkehren; das heißt: Lassen sich für ein einziges $\varrho \geqq n+1$ die $n+1$ Funktionen $\chi_{\varrho 0}(\alpha)$, $\chi_{\varrho 1}(\alpha)$, …, $\chi_{\varrho n}(\alpha)$ derart bestimmen, daß für dieses einzige $\varrho$ aber für alle $\nu$ die Beziehungen (195) gelten, so ist das System $(A^*)$ in bezug auf $\alpha$ nach Laplace integrabel.

Es sei endlich auch das System $(L^*)$ vom Laplaceschen Typus, dann ist nach den Ausführungen in Abschnitt 68 § 18 das vorgelegte Problem vom Haupttypus und somit sind in diesem Fall die Bedingungen (194) erfüllt. Es sei nun ferner $\tilde{\xi}_\nu(\alpha\beta)$, $\tilde{\eta}(\alpha\beta)$ eine endliche Koeffizientenfolge, die zu einer Lösung

$$(196) \qquad \begin{cases} \xi(\alpha\beta) = \dfrac{d\varphi_0}{d\alpha} + \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\xi}_\nu(\alpha\beta)\, \varphi_\nu(\alpha), \\ \eta(\alpha\beta) = \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\eta}_\nu(\alpha\beta)\, \varphi_\nu(\alpha) \end{cases}$$

des Systems $(L^*)$ vom Laplaceschen Typus gehört. Dann ist nach einer Bemerkung am Schlusse vom Abschnitt 80 das Funktionenpaar (196) auch gleichzeitig Lösung des Systems $(A^*)$, das heißt aber: *Ist das System* $(L^*)$ *vom Laplaceschen Typus, so ist auch das System* $(A^*)$ *in bezug auf* $\alpha$ *nach Laplace integrabel; die* $B_{\varrho\nu}(\alpha)$ *genügen mithin auch den Beziehungen* (195). Damit ist der Beweis einer am Schlusse von Abschnitt 78 ausgesprochenen Behauptung erbracht.

Die Beziehungen (194) und (195) sind aber nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen für den Laplaceschen Fall. Denn sind die Beziehungen (195) erfüllt, so ist jedenfalls das System $(\Lambda^*)$ nach Laplace in bezug auf $\alpha$ integrabel. Gelten nun aber außerdem auch noch die Gleichungen (194), so gehören nach der Bemerkung aus Abschnitt 80 alle Koeffizientenfolgen $\xi_\nu$, $\eta_\nu$, die zu formalen Lösungen von $(\Lambda^*)$ gehören, auch gleichzeitig zu formalen Lösungen von $(L^*)$; dann ist aber auch das System $(L^*)$ vom Laplaceschen Typus.

Zusammenfassend können wir sagen: *Die Beziehungen* (194) *und* (195) *sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Systeme* $(L^*)$ *und* $(\Lambda^*)$ *beide nach Laplace integrabel sind. Ist nur* $(\Lambda^*)$ *nach Laplace in bezug auf* $\alpha$ *integrabel, so gelten zwar die Beziehungen* (195), *aber nicht alle Gleichungen* (194). Der Fall, daß das System $(L^*)$, aber nicht $(\Lambda^*)$ nach Laplace integrabel ist, kann nach dem Vorhergehenden offenbar nicht eintreten.

Damit ist gezeigt, daß die Matrix der Funktionen $B_{\varrho\nu}$ nicht nur ein Kriterium für das Eintreten des Hauptfalles, sondern auch für das Eintreten des spezielleren Laplaceschen Falles liefert.

(Eingegangen am 7. März 1929.)

# Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen.

Von

Henrik L. Selberg in Bergen (Norwegen).

In seiner Thèse[1]) hat Herr Rémoundos folgenden Satz über analytische Funktionen mit einer endlichen Anzahl Zweige, sogenannte algebroide Funktionen, bewiesen:

Eine nichtalgebraische analytische Funktion mit $k$ Zweigen, die in jedem endlichen Punkte algebraischen Charakter besitzt, nimmt jeden Wert unendlich oft an, mit Ausnahme höchstens einer Anzahl $2k$.

Die vorliegende Arbeit will diesen Satz in der Richtung vertiefen und vervollständigen, in welcher die Herren F. und R. Nevanlinna in den letzten Jahren die Wertverteilung der eindeutigen Funktionen untersucht haben[2]). Wir verwenden hierzu eine Methode, welche Herr F. Nevanlinna in der zitierten Abhandlung ausgearbeitet hat, und die im Prinzip in der Anwendung gewisser Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = e^{2u}$$

besteht.

Wir beschränken uns auf die Herleitung einiger Sätze mit einem ähnlichen Inhalt wie der sogenannte erste und zweite Hauptsatz in der Theorie der meromorphen Funktionen. Die Analogie mit den eindeutigen Funktionen läßt sich indessen ohne Schwierigkeiten noch weiter verfolgen; in der Beziehung hoffe ich diese Arbeit gelegentlich später zu ergänzen.

---

[1]) Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes, Ann. de la fac. des sciences de Toulouse (2) **8** (1906), S. 1—72. Man vgl. auch: G. Rémoundos, Extension aux fonctions algébroides multiformes du theorème de M. Picard et ses généralisations. Mém. des sciences math., fasc. **23**.

[2]) Folgende Abhandlungen werden wesentlich in Betracht gezogen: R. Nevanlinna, Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta math. **46**, S. 1—100. F. Nevanlinna, Über die Anwendung einer Klasse uniformisierender Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen, Acta math. **50**, S. 159—188.

## § 1.

**1.** Zu dem Begriff einer algebroiden Funktion gelangt man in folgender Weise:

Es sei $P\{x-\alpha_0\}$ eine Potenzreihe, die in einer gewissen Umgebung des Punktes $\alpha_0$ konvergiert, und $G$ ein schlichtes Gebiet, das $\alpha_0$ als inneren Punkt enthält. Es sei ferner diese Potenzreihe innerhalb $G$ analytisch fortsetzbar in der Weise, daß die durch die Fortsetzung entstandene analytische Funktion $z(x)$ folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1. $z(x)$ hat in jedem inneren Punkte von $G$ algebraischen Charakter.

2. Die Anzahl der Zweige von $z(x)$ in $G$ ist endlich.

Unter diesen Voraussetzungen sagt man nach Poincaré, $z(x)$ sei in dem Gebiete $G$ algebroid.

Es sei nun $z(x)$ eine Funktion, die in $G$ algebroid ist, und $k$ die Anzahl ihrer Zweige. $z(x)$ ist eindeutig auf ihrer über $G$ ausgebreiteten $k$-blättrigen Riemannschen Fläche, deren Verzweigungspunkte sich nach der obigen Definition in keinem inneren Punkte von $G$ häufen. Diese Riemannsche Fläche wird in dem Folgenden der Kürze wegen durch $F$ bezeichnet.

Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß $z(x)$ eine Gleichung

$$\{z(x)\}^k + A_1(x)\{z(x)\}^{k-1} + \ldots + A_k(x) = 0 \tag{1}$$

befriedigt, wo $A_1(x), \ldots, A_k(x)$, als symmetrische Grundfunktionen der $k$ Zweige von $z(x)$, eindeutig und meromorph in $G$ sind. Da die Blätter von $F$ alle innerhalb $G$ zusammenhängen, muß die Gleichung (1) irreduzibel sein, d. h. die linke Seite in (1) kann nicht in Faktoren derselben Form zerlegt werden derart, daß alle Koeffizienten, welche in diesen Faktoren vorkommen, eindeutig und meromorph in $G$ sind.

Sind insbesondere die Koeffizienten $A_1(x), \ldots, A_k(x)$ rationale Funktionen, so liegt der Fall einer algebraischen Funktion vor.

Umgekehrt definiert jede Gleichung der Form (1) eine $k$-deutige algebroide Funktion, falls die Gleichung in der obigen Bedeutung des Wortes irreduzibel ist.

**2.** Wir sagen, daß die Funktion $z(x)$ in einem Punkte $\alpha$ der Fläche $F$ eine $\tau$-fache $a$-Stelle hat, wenn sie in diesem Punkte eine Reihenentwicklung der Form

$$z(x) = P\{\sqrt[\lambda]{x-\alpha}\} = a + \gamma(\sqrt[\lambda]{x-\alpha})^\tau + \ldots \qquad (\gamma \neq 0) \tag{2}$$

besitzt, wo die Zahl $\lambda$ angibt, wie viele Blätter in dem Punkte $\alpha$ im Zyklus

zusammenhängen. Ist $a = \infty$, so ist diese Entwicklung durch

$$(2)' \qquad z(x) = P\{\sqrt[\lambda]{x-\alpha}\} = \frac{\gamma}{\left(\sqrt[\lambda]{x-\alpha}\right)^{\tau}} + \dots \qquad (\gamma \neq 0)$$

zu ersetzen.

In den nachfolgenden Paragraphen werden wir über die Verteilung der $a$-Stellen einer Funktion, welche im Inneren eines Kreises bzw. in der ganzen endlichen Ebene algebroid ist, einige Sätze beweisen.

## § 2.

**3.** Nach dem Vorgang von Herrn F. Nevanlinna und in nahem Anschluß an ihn[3]) werden wir das Wertverteilungsproblem der algebroiden Funktionen unter Anwendung gewisser uniformisierender Transzendenten untersuchen. Diese Transzendenten können, wie folgt, definiert werden:

Es sei $\zeta(z; a_1, \dots, a_{q-1}, \infty)$ eine analytische Funktion, welche eine über die ganze $z$-Ebene ausgebreitete, regulär verzweigte, einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, mit Windungspunkten unendlich hoher Ordnung an den Stellen $a_1, \dots, a_{q-1}, \infty$ auf die obere Halbebene $(q > 2)$ bzw. auf die in $\zeta = \infty$ punktierte Vollebene $(q = 2)$, abbildet. Die Funktion $\zeta(z; a_1, \dots, a_{q-1}, \infty)$ ist durch diese Eigenschaft bis auf eine lineare Transformation völlig bestimmt.

Jeder polymorphen Funktion $\zeta(z; a_1, \dots, a_{q-1}, \infty)$ kann eine reelle eindeutige Funktion $u(z; a_1, \dots, a_{q-1}, \infty)$ in folgender Weise zugeordnet werden:

Im Falle $q = 2$ sei $u$ der Logarithmus des euklidischen Vergrößerungsverhältnisses:

$$(3) \qquad u(z; a_1, \infty) = \log\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \log\frac{1}{|z-a|} + C,$$

wo $C$ eine Konstante ist.

Im Falle $q > 2$ sei $u$ der Logarithmus des hyperbolischen Vergrößerungsverhältnisses:

$$(4) \qquad u(z; a_1, \dots, a_{q-1}, \infty) = \log\frac{\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|}{\Im\{\zeta\}}.$$

Diese reelle eindeutige Funktion $u(z; a_1, \dots, a_{q-1}, \infty)$ ist für alle $z \neq a_1, \dots, a_{q-1}, \infty$ nebst ihren partiellen Ableitungen stetig und genügt außerdem der partiellen Differentialgleichung

$$(5) \qquad \Delta u = 0 \qquad (q = 2)$$

bzw.

$$(6) \qquad \Delta u = e^{2u} \qquad (q > 2),$$

wo $\Delta$ der Laplacesche Operator ist.

---

[3]) Loc. cit.

In den Punkten $a_1, \ldots, a_{q-1}, \infty$ wird $u$ unendlich. In der Umgebung dieser singulären Punkte gelten, falls $q > 2$, folgende Entwicklungen:

$$(7) \qquad \log u = \log \frac{1}{|z - a_\nu|} - \log_2 \frac{1}{|z - a_\nu|} + \varepsilon(z - a_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, q-1)$$

und in der Umgebung des unendlich fernen Punktes:

$$(7)' \qquad \log u = -\log|z| - \log_2|z| + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo $\varepsilon(z)$ eine Funktion bezeichnet, welche nebst ihren mit $|z|$ multiplizierten Ableitungen erster Ordnung für $|z| \to 0$ verschwindet.

## § 3.

**4.** Es sei jetzt $z(x)$ eine Funktion, die im Inneren des Kreises $|x| = R > 0$ $k$-deutig und algebroid ist. Im Nullpunkte mögen die $k$ Zweige in $h \leqq k$ Zyklen zerfallen; die entsprechenden Reihenentwicklungen seien

$$(8) \qquad P_1\{\sqrt[\lambda_1]{x}\} = c_1(\sqrt[\lambda_1]{x})^{\tau_1} + \ldots, \ldots, P_h\{\sqrt[\lambda_h]{x}\} = c_h(\sqrt[\lambda_h]{x})^{\tau_h} + \ldots$$
$$(c_\nu \neq 0,\ \nu = 1, \ldots, h),$$

wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ die Verzweigungszahlen der über $x = 0$ gelagerten Punkte der Riemannschen Fläche $F$ sind und somit der Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{h} \lambda_\nu = k$$

genügen, während die Zahlen $\tau_1, \ldots, \tau_h$ ganzzahlig, sonst aber positiv, negativ oder gleich Null sind.

Wir stellen uns als erste Aufgabe, einen zu dem sogenannten ersten Hauptsatz in der Theorie der meromorphen Funktionen[4]) analogen Satz herzuleiten. Diese Aufgabe ließe sich in sehr einfacher Weise erledigen, ausgehend von der Bemerkung, daß nach (1)

$$\prod_{\nu=1}^{k} z_\nu(x) = (-1)^k A_k(x)$$

gilt, wo $z_\nu(x)$ $\nu = 1, \ldots, k$ die verschiedenen Zweige von $z(x)$ sind, indem man auf die meromorphe Funktion $A_k(x)$ die Jensensche Formel anwendet. Ich ziehe indessen einen anderen, und wie es mir scheint, sachgemäßeren Weg vor:

Derjenige Teil der Riemannschen Fläche $F$, welcher innerhalb des Kreises $|x| \leqq t$ $(0 \leqq t < R)$ liegt, zerfällt in eine endliche Anzahl von

[4]) R. Nevanlinna, loc. cit. S. 18.

einfach- oder mehrfachzusammenhängenden Bereichen $B_1, \ldots, B_i$ $(i \leqq k)$, deren Ränder $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i$ aus den Projektionen des Kreises $|x| = t$ auf $F$ gebildet werden. Wir nehmen an, daß $t$ so ausgewählt ist, daß die Randkurven $\Gamma_\nu$ durch keine Verzweigungspunkte von $F$ und keine 0- oder $\infty$-Stellen von $z(x)$ hindurchgehen. Die erwähnten Punkte isolieren wir mittels kleiner Kreise auf $F$. Dadurch entstehen neue Bereiche $B_1', \ldots, B_i'$, deren entsprechenden Ränder $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_i'$ aus den Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i$ und denjenigen von den Isolierungskreisen bestehen, welche innerhalb des Kreises $|x| \leqq t$ liegen. In den Bereichen $B_1', \ldots, B_i'$ ist die Funktion

$$v(x) = u(z(x); 0, \infty) = \log \frac{1}{|z(x)|}$$

eindeutig und harmonisch, es ist also

$$\sum_{\nu=1}^{i} \int_{\Gamma_\nu'} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = 0\,.$$

Wir bezeichnen nun für alle $t$ $(0 \leqq t < R)$ mit

$$n(t, z) = n(t; \infty) \tag{9}$$

die Anzahl derjenigen $\infty$-Stellen der Funktion $z(x)$, die im Kreise $|x| \leqq t$ liegen, wobei jede Stelle so oft gezählt wird, als ihre Vielfachheit angibt (vgl. § 1, **2.**), und setzen

$$\mu(t) = \frac{1}{2k\pi} \sum_{\nu=1}^{i} \int_{\Gamma_\nu} \log |z(t e^{i\varphi})|\, d\varphi\,.$$

Indem wir alsdann die Halbmesser der Isolierungskreise gegen Null streben lassen, ergibt sich

$$kt \frac{d\mu(t)}{dt} = n\left(t, \frac{1}{z}\right) - n(t, z),$$

woraus, wegen der Stetigkeit von $\mu(t)$,

$$\mu(r) = \frac{1}{k} \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{z}\right) - n\left(0, \frac{1}{z}\right)}{t}\, dt + \frac{n\left(0, \frac{1}{z}\right)}{k} \log r - \frac{1}{k} \int_0^r \frac{n(t, z) - n(0, z)}{t}\, dt$$
$$- \frac{n(0, z)}{k} \log r + \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{h} \lambda_\nu \log |c_\nu| \tag{10}$$

folgt.

Diese Formel enthält als speziellen Fall die bekannte Jensensche Formel und könnte übrigens aus jener abgeleitet werden (vgl. die Bemerkung auf S. 712).

**5.** Die Bedeutung der Beziehung (10) tritt klarer hervor, wenn man im Anschluß an Herrn R. Nevanlinna die Größen

$$m(r,z) = m(r;\infty) = \frac{1}{2k\pi}\sum_{\nu=1}^{i}\int_{\Gamma_\nu} \overset{+}{\log}|z(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

$$(11)\qquad N(r,z) = N(r;\infty) = \frac{1}{k}\int_0^r \frac{n(t;\infty)-n(0;\infty)}{t}\,dt + \frac{n(0;\infty)}{k}\log r,$$

$$T(r,z) = m(r,z) + N(r,z)$$

einführt, wo $\Gamma_\nu$ dieselbe Bedeutung wie vorhin hat, jetzt aber in bezug auf den Kreis $|x| = r$, und $\overset{+}{\log}\beta$ gleich 0 oder $\log\beta$ zu nehmen ist, je nachdem $\beta \leqq 1$ oder $\beta \geqq 1$ gilt. Für endliches $a$ sei ebenso

$$(11)'\quad m\left(r,\frac{1}{z-a}\right) = m(r;a),\quad n\left(r,\frac{1}{z-a}\right) = n(r;a),\quad N\left(r,\frac{1}{z-a}\right) = N(r;a).$$

In diesen Größen ausgedrückt reduziert sich die Formel (10) auf

$$(12)\qquad m(r;0) + N(r;0) = T(r,z) - \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{h}\lambda_\nu \log|c_\nu|.$$

Bedenken wir jetzt, daß die Funktionen $z(x)$ und $z(x) - a$ dieselben Pole besitzen, während, wie man leicht einsieht[5]),

$$|m(r,z-a) - m(r,z)| \leqq \overset{+}{\log}|a| + \log 2$$

ist, so erhalten wir, indem wir (12) auf $z(x) - a$ anwenden,

$$T\left(r,\frac{1}{z-a}\right) = T(r,z) + s(r),$$

wo

$$|s(r)| \leqq \left|\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{h}\lambda_\nu \log|c_\nu|\right| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2$$

ist, und $c_\nu$ die in (8) angegebene Bedeutung hat, wobei jedoch die Funktion $z(x)$ durch $z(x) - a$ zu ersetzen ist. Das in (12) enthaltene Ergebnis läßt sich in folgendem Satz aussprechen, welchen Herr R. Nevanlinna, seiner fundamentalen Bedeutung wegen, im Falle einer eindeutigen Funktion als den ersten Hauptsatz in der Theorie der Wertverteilung bezeichnet hat:

Satz 1 (Erster Hauptsatz). *Zwischen den Größen* (11) *und* $(11)'$ *einer im Kreise* $|x| \leqq R$ *algebroiden nichtkonstanten Funktion* $z(x)$ *besteht für jeden endlichen oder unendlichen Wert* $a$ *die Relation*:

$$(12)'\qquad m(r;a) + N(r;a) = T(r,z) + O(1),$$

*wo der absolute Betrag der Größe* $O(1)$ *unterhalb einer von* $r$ *unabhängigen Schranke liegt.*

[5]) R. Nevanlinna, loc. cit. S. 17.

Die Größe $T(r, z)$, die offenbar denselben zentralen Platz wie in der Theorie der meromorphen Funktionen einnimmt, besitzt gewisse einfache Eigenschaften. In der Theorie der meromorphen Funktionen wird bewiesen[6]), *daß $T(r, z)$ eine nichtabnehmende Funktion von $r$ und sogar eine nach unten konvexe Funktion von $\log r$ ist.* Der Beweisgedanke, der zu diesen Sätzen führt, überträgt sich unmittelbar auf algebroide Funktionen, so daß $T(r, z)$ *auch in dem mehrdeutigen Falle die erwähnten Eigenschaften hat.*

**6.** Wir werden hier die Beziehungen zwischen $T(r, z)$ und $T(r, A_\nu)$ darlegen, wo $A_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ die Koeffizienten der Gleichung

$$\{z(x)\}^k + A_1(x)\{z(x)\}^{k-1} + \ldots + A_k(x) = 0,$$

d. h. die symmetrischen Grundfunktionen der $k$ Zweige $z_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ sind.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß die Anzahl der Addenden, aus denen sich eine symmetrische Grundfunktion von $k$ Veränderlichen zusammensetzt, höchstens

$$H = \binom{k}{\left[\frac{k+1}{2}\right]}$$

beträgt. Beachtet man, daß $A_\nu(x)$ als die $\nu$-te symmetrische Grundfunktion der Werte $z_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ definiert ist, so ergibt sich zunächst die Ungleichung[7])

$$\overset{+}{\log}|A_\nu(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{k} \overset{+}{\log}|z_\nu(x)| + \log H. \tag{13}$$

Um eine Ungleichung aufzustellen, die etwas in umgekehrter Richtung aussagt, verfahren wir in folgender Weise:

Es sei zunächst $k > 1$. Die Werte $0, \log H, 2\log H, \ldots, (k+1)\log H$ bestimmen $k+1$ offene Intervalle. Da die Anzahl der Zweige von $z(x)$ gleich $k$ ist, existiert wenigstens ein Intervall mit den Endpunkten $\varkappa \log H$ und $(\varkappa+1)\log H$ $(0 \leqq \varkappa \leqq k)$, das keinen Wert $\log|z_\nu(x)|$ enthält. Es seien z. B. die $\nu_0$ ersten der Werte $\log|z_1(x)|, \ldots, \log|z_k(x)|$ größer oder gleich $(\varkappa+1)\log H$, die übrigen kleiner oder gleich $\varkappa \log H$. Wir unterscheiden zwei Fälle je nachdem $\nu_0 > 0$ oder $\nu_0 = 0$ ist.

Im ersten Falle betrachten wir die symmetrische Grundfunktion $A_{\nu_0}(x)$, welche aus $\binom{k}{\nu_0}$ Addenden besteht, von denen einer

$$\prod_{\nu=1}^{\nu_0} z_\nu(x)$$

---

[6]) R. Nevanlinna, loc. cit. S. 13—16.

[7]) Wir machen hier und später von den leicht zu beweisenden Ungleichungen: $\overset{+}{\log}(\beta_1 \ldots \beta_i) \leqq \sum_{\nu=1}^{i} \overset{+}{\log}\beta_\nu$ und $\overset{+}{\log} \sum_{\nu=1}^{i} \beta_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{i} \overset{+}{\log}\beta_\nu + \log i$, Gebrauch.

ist. Wegen der Konstruktion der Zahl $\nu_0$ ist der absolute Betrag der Summe der übrigen Addenden höchstens gleich

$$\frac{\binom{k}{\nu_0}-1}{H}\prod_{\nu=1}^{\nu_0}|z_\nu(x)| \leqq \left(1-\frac{1}{H}\right)\prod_{\nu=1}^{\nu_0}|z_\nu(x)|,$$

infolgedessen wird

$$\frac{1}{H}\prod_{\nu=1}^{\nu_0}|z_\nu(x)| \leqq |A_{\nu_0}(x)|.$$

Unter Beachtung der Ungleichungen

$$\log|z_\nu(x)| > 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, \nu_0),$$

$$\sum_{\nu=\nu_0+1}^{k}\log|z_\nu(x)| \leqq (k-\nu_0)\varkappa\log H \leqq (k-1)k\log H,$$

folgt hieraus

$$\sum_{\nu=1}^{k}{}^{+}\log|z_\nu(x)| \leqq {}^{+}\log|A_{\nu_0}(x)| + k^2\log H,$$

somit

$$\sum_{\nu=1}^{k}{}^{+}\log|z_\nu(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{k}{}^{+}\log|A_\nu(x)| + k^2\log H. \tag{14}$$

Im Falle $\nu_0 = 0$ erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{k}{}^{+}\log|z_\nu(x)| \leqq k\varkappa\log H \leqq k^2\log H,$$

so daß (14) richtig bleibt.

Ist nun endlich $k = 1$, so wird $H = 1$, und die Abschätzung (14) ist also jedenfalls gültig.

Aus (13) und (14) folgt durch Integration

$$\frac{1}{k}m(r, A_\nu) - \frac{1}{k}\log H \leqq m(r, z) \leqq \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k}m(r, A_\nu) + k\log H. \tag{15}$$

Die Größen $n(r, z)$ und $n(r, A_\nu)$ sind durch ähnliche Ungleichungen verbunden. In einem Punkte $x$, wo die $k$ Zweige von $z(x)$ insgesamt $h$ Pole besitzen, kann $A_\nu(x)$ höchstens einen $h$-fachen Pol haben. Anderseits hat wenigstens einer der Koeffizienten $A_\nu(x)$ in diesem Punkte genau einen $h$-fachen Pol. Es gilt demnach

$$n(r, A_\nu) \leqq n(r, z) \leqq \sum_{\nu=1}^{k}n(r, A_\nu), \tag{16}$$

Nach Division der letzten Ungleichungen mit $r$ und nachfolgender Integration ergibt sich leicht aus (15) und (16)

$$\frac{1}{k}T(r, A_\nu) - O(1) \leqq T(r, z) \leqq \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k}T(r, A_\nu) + O(1). \tag{17}$$

Hieraus können wir sofort einen interessanten Schluß ziehen. Beachten wir nämlich, daß $z(x)$ dann und nur dann eine algebraische Funktion ist, wenn sämtliche Koeffizienten $A_\nu(x)$ sich auf rationale Funktionen reduzieren, und daß, nach einem Satz in der Theorie der meromorphen Funktionen, die Beziehung

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,z)}{\log r} < \infty \tag{18}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß $A(x)$ eine rationale Funktion ist, so ergibt sich mittels der Abschätzung (17), daß *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion $z(x)$, die in der ganzen endlichen Ebene algebroid ist, sich auf eine algebraische Funktion reduziert, in*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,z)}{\log r} < \infty \tag{18}'$$

*besteht.*

Ähnlich beweist man, daß *unter den nämlichen Voraussetzungen*

$$\lim_{r\to\infty} T(r,z) = \infty$$

*gilt für jede nicht konstante Funktion $z(x)$.*

## § 4.

**7.** Die Anwendung der reellen Invariante $u(z; a_1, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ zur Untersuchung der Wertverteilung einer algebroiden Funktion liefert im Falle $q = 2$ im wesentlichen den sogenannten ersten Hauptsatz, der eine bemerkenswerte Eigenschaft der Summe $m(r;a) + N(r;a)$ ausspricht. Eine Aussage über das Verhalten der einzelnen Komponenten $m(r;a)$ und $N(r;a)$ erhält man, wie in der Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, erst wenn man zum Falle $q > 2$ übergeht.

Wie vorhin bezeichnen wir mit $z(x)$ eine Funktion, die im Innern des Kreises $|x| < R$ $k$-deutig und algebroid ist.

Die reelle Funktion

$$v(x) = \log \frac{\left|\frac{d\zeta(z(x))}{dx}\right|}{\Im\{\zeta(z(x))\}} = u\{z(x); a_1, \ldots, a_{q-1}, \infty\} + \log\left|\frac{dz(x)}{dx}\right| \tag{19}$$
$$(q > 2),$$

ist auf der Riemannschen Fläche $F$ eindeutig, und genügt, von den $a_\nu$-Stellen von $z(x)$ und den 0- und $\infty$-Stellen von $\frac{dz(x)}{dx}$ abgesehen, der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta v = e^{2v}. \tag{20}$$

In der Umgebung einer $a_1$-, ..., $a_{q-1}$- oder $\infty$-Stelle $\alpha$ gilt nach den Entwicklungen (7) und (7)'

$$v(x) = \log \frac{1}{|x-\alpha|} - \log_2 \frac{1}{|x-\alpha|} + \varepsilon(x-\alpha), \tag{21}$$

wo $\varepsilon(x-\alpha)$ nebst ihren mit $|x-\alpha|$ multiplizierten Ableitungen erster Ordnung für $x \to \alpha$ verschwindet. In der Umgebung eines Punktes $\alpha$, wo $z(x)$ von den obigen Werten verschieden ist und zugleich die Entwicklung

$$P\{\sqrt[\lambda]{x-\alpha}\} = \gamma_0 + \gamma_1 (\sqrt[\lambda]{x-\alpha})^\tau + \dots \qquad (\gamma_1 \neq 0)$$

hat, ist

$$v(x) = \left(1 - \frac{\tau}{\lambda}\right) \log \frac{1}{|x-\alpha|} + u(\gamma_0) + \log \left| \frac{\tau}{\lambda} \gamma_1 \right| + \varepsilon(x-\alpha). \tag{22}$$

8. Wir beschreiben um den Nullpunkt den Kreis $|x| = r$, $0 \leqq r < R$. Derjenige Teil der Fläche $F$, der im Innern dieses Kreises liegt, zerfällt in die zusammenhängenden Bereiche $B_1, \dots, B_i$. Es seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_i$ die Ränder dieser Bereiche. Wir nehmen an, daß $r$ so gewählt ist, daß weder kritische Stellen von $v(x)$ noch Verzweigungspunkte der Fläche $F$ auf den Kurven $\Gamma$ liegen. Isolieren wir wieder alle die erwähnten Stellen mittels kleiner Kreise auf $F$, so entstehen aus den Bereichen $B$ neue Bereiche $B_1', \dots, B_i'$ mit den Rändern $\Gamma_1', \dots, \Gamma_i'$, und man erhält gemäß (20)

$$\sum_{\nu=1}^{i} \int_{\Gamma_\nu'} \frac{\partial v}{\partial n} ds = -\sum_{\nu=1}^{i} \int_{B_\nu'} \Delta v \, df = -\sum_{\nu=1}^{i} \int_{B_\nu'} e^{2v} df, \tag{23}$$

wo $df$ das Flächenelement bezeichnet. Setzen wir

$$\mu(r) = \frac{1}{2k\pi} \sum_{\nu=1}^{i} \int_{\Gamma_\nu} v(re^{i\varphi}) \, d\varphi, \tag{24}$$

und lassen wir in (23) die Halbmesser der Isolierungskreise gegen Null streben, so ergibt sich nach (21) und (22)

$$kr\mu'(r) = -\sum_{\nu=1}^{q-1} n(r; a_\nu) - n(r; \infty)$$

$$+ \left[ 2n(r,z) + n\left(r, \frac{1}{z'}\right) - n(r, z') \right] + \frac{1}{2k\pi} \sum_{\nu=1}^{i} \int_{B_\nu} e^{2v} df, \tag{25}$$

mit $\mu'(r) = \frac{d\mu'(r)}{dr}$ und $z'(x) = \frac{dz(x)}{dx}$.

Um nun die Formel (24) für die weitere Rechnung geeignet umzuformen, bemerken wir, daß der Ausdruck in der Klammer nur von denjenigen Punkten der Fläche $F$ Beiträge erhalten kann, welche entweder

mehrfache Stellen von $z(x)$ oder Windungspunkte von $F$ sind. Wenn in einem solchen Punkt $\alpha$ $z(x)$ die Entwicklung

$$z(x) = P\{\sqrt[\lambda]{x-\alpha}\} = \gamma_0 + \gamma_1 (\sqrt[\lambda]{x-\alpha})^{\tau} + \ldots \qquad (\gamma_1 \neq 0)$$

bzw.

$$z(x) = P\{\sqrt[\lambda]{x-\alpha}\} = \frac{\gamma_1}{(\sqrt[\lambda]{x-\alpha})^{\tau}} + \ldots \qquad (\gamma_1 \neq 0)$$

hat, so ist der entsprechende Beitrag $\tau - \lambda$ und fällt somit positiv oder negativ aus, je nachdem $\tau - \lambda$ größer oder kleiner als 0 ist. Setzen wir daher

$$(26) \quad 2n_1(r) = \sum_{|\alpha| \leqq r} (|\tau - \lambda| + \tau - \lambda), \quad 2n_2(r) = \sum_{|\alpha| \leqq r} (|\tau - \lambda| - \tau + \lambda),$$

wobei die Summen über sämtliche Punkte $\alpha$ der Fläche $F$ zu erstrecken sind, die in dem Kreise $|\alpha| \leqq r$ liegen, so wird [8])

$$(27) \qquad \left[2n(r,z) + n\left(r, \frac{1}{z'}\right) - n(r,z')\right] = n_1(r) - n_2(r).$$

Führt man noch die Größen

$$(28) \qquad \begin{aligned} n(r) &= \sum_{\nu=1}^{q-1} n(r; a_\nu) + n(r;\infty) + n_2(r), \\ N(r) &= \frac{1}{k}\int_0^r \frac{n(t)-n(0)}{t}\,dt + \frac{n(0)}{k}\log r \end{aligned}$$

ein, so nimmt (25) die Form

$$(29) \qquad r\mu'(r) = -\frac{n(r)}{k} + \frac{n_1(r)}{k} + \frac{1}{2k\pi}\sum_{\nu=1}^{i}\int_{B_\nu} e^{2v}\,df.$$

an, und hieraus folgt durch Differentiation in bezug auf $r$

$$(30) \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\mu'(r)) = \frac{1}{2k\pi}\sum_{\nu=1}^{i}\int_{\Gamma_\nu} e^{2v(re^{i\varphi})}\,d\varphi.$$

Von jetzt an können wir genau der Darstellung von Herrn F. Nevanlinna (loc. cit. S. 175) folgen.

**9.** Mit Hilfe der Beziehung

$$(31) \qquad \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \log f(t)\,dt \leqq \log\left\{\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right\},$$

[8]) Im Falle $k = 1$ verschwindet $n_2(r)$ identisch.

die für jede reelle, positive Funktion $f(t)$ im Intervalle $(\alpha, \beta)$ gültig ist, erhalten wir aus (30) zunächst

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\mu'(r)) \geqq e^{2\mu(r)}. \tag{32}$$

Um diese Differentialgleichung zu integrieren, führen wir als neue Variable $t = \log r$ ein; setzen wir noch

$$y(t) = \mu(r) + N(r) + \log r = \mu(e^t) + N(e^t) + t, \tag{33}$$

so geht die Ungleichung (32) in

$$y''(t) \geqq e^{2(y(t)-N(r))}$$

über.

Hier wollen wir einige Bemerkungen über die Funktion $y(t)$ einschalten. Da man nach (29) für die Ableitung $y'(t)$ den Ausdruck

$$y'(t) = r\mu'(r) + \frac{n(r)}{k} + 1 = \frac{n_1(r)}{k} + 1 + \frac{1}{2k\pi}\sum_{\nu=1}^{i}\int_{B_\nu} e^{2v}\,df$$

findet, muß $y'(t)$ eine positive und mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen $t_1 < t_2 < \ldots < t_\nu < \ldots$ $(-\infty < t_\nu < \log r)$ von $n_1(r)$ stetige Funktion von $t$ sein; an den erwähnten Stellen erleidet $y'(t)$ mit wachsendem $t$ stets positive Sprünge. Insbesondere existiert also der Grenzwert

$$\lim_{t\to-\infty} y'(t) = \frac{n_1(r)}{k} + 1 = p > 0, \tag{34}$$

und es ist deshalb $\lim y(t) = -\infty$ für $t \to -\infty$.

Beschränken wir nun die Variation von $t$ auf das Intervall $-\infty$ bis $\tau = \log \varrho$ $(0 < \varrho < R)$, und bedenken wir, daß $N(r)$, ihrer Bildungsweise gemäß, nichtabnehmend ist, so ergibt sich

$$y''(t) \geqq e^{2(y(t)-N(\varrho))}.$$

Nach Multiplikation beiderseits mit $2y'(t)$ und nachfolgender Integration von $-\infty$ bis $t$ folgt hieraus

$$(y(t))^2 - p^2 - \sum_{t_\nu < t} (y'(t_\nu + 0))^2 - (y'(t_\nu - 0))^2 \geqq e^{2(y(t)-N(\varrho))},$$

also, da die linksstehende Summe positiv ist,

$$(y'(t))^2 \geqq p^2 + e^{2(y(t)-N(\varrho))},$$

oder

$$dt \leqq [p^2 + e^{2(y(t)-N(\varrho))}]^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

Die Integration der letzten Ungleichung zwischen $t = \log r$ und $\tau = \log \varrho$ gibt

$$\log\left(\frac{\varrho}{r}\right) \leqq \frac{1}{p}\log\frac{pe^{N(\varrho)-y(t)} + [1 + p^2 e^{2(N(\varrho)-y(t))}]^{\frac{1}{2}}}{pe^{N(\varrho)-y(\tau)} + [1 + p^2 e^{2(N(\varrho)-y(\tau))}]^{\frac{1}{2}}},$$

mithin

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^p \leqq p e^{N(\varrho)-y(t)} + [1 + p^2 e^{2(N(\varrho)-y(t))}]^{\frac{1}{2}}.$$

Nach Auflösung dieser Ungleichung in bezug auf $y(t)$ und Berücksichtigung der Gleichung (33) ergibt sich schließlich

$$\mu(r) \leqq N(\varrho) - N(r) + \log \frac{2p\varrho^p}{\varrho^{2p} - r^{2p}} + (p-1)\log r \tag{35}$$

für alle $r$ und $\varrho$ derart, daß $0 < r < \varrho < R$.[9])

Die Beziehung zwischen den Größen (24), (28) und (34), welche die soeben hergeleitete Formel zum Ausdruck bringt, hat für die Untersuchung der Wertverteilung der algebroiden Funktionen dieselbe grundlegende Bedeutung, wie in der Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Eine ihrer wichtigsten Folgerungen werden wir im nächsten Paragraphen behandeln.

## § 5.

**10.** Als eine Anwendung des Ergebnisses der im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen hat Herr F. Nevanlinna in der öfters zitierten Abhandlung den sogenannten zweiten Hauptsatz in der Theorie der meromorphen Funktionen hergeleitet. Seine Überlegungen bleiben im wesentlichen auch für algebroide Funktionen gültig und führen in diesem Falle zu einem Satz, der als eine direkte Verallgemeinerung jenes Satzes angesehen werden kann. Der Kürze wegen beschränken wir uns von jetzt ab auf den Fall, wo $z(x)$ in der ganzen endlichen Ebene algebroid, jedoch keine Konstante ist. Die Tragweite der folgenden Betrachtungen unterliegt indessen dieser Einschränkung nicht, vielmehr können wir behaupten — wie aus der Theorie der meromorphen Funktionen bekannt sein wird —, daß der behandelte Satz sich in wenig modifizierter Form auch auf Funktionen, welche nur im Inneren eines endlichen Kreises algebroid sind, erstrecken läßt.

Der Beweis macht von einigen Umformungen der Abschätzung (35) Gebrauch. Wegen

$$\varrho^{2p} - r^{2p} > 2pr^{2p-1}(\varrho - r)$$

erhält man zunächst

$$\mu(r) < N(\varrho) - N(r) + \log \frac{1}{\varrho - r} + p \log \frac{\varrho}{r}. \tag{36}$$

Um hier das Glied $N(\varrho) - N(r)$ zu eliminieren, verfahren wir nach Herrn R. Nevanlinna folgendermaßen: Wir bestimmen die Zahl $\varrho'$ so, daß $r < \varrho' \leqq 2r$ wird und beschränken $\varrho$ in der obigen Ungleichung auf das

[9]) Vgl. F. Nevanlinna, loc. cit. S. 178.

Intervall $r < \varrho < \varrho'$. Da $N(r)$ als Funktion von $\log r$ aufgefaßt nach unten konvex ist, muß

$$N(\varrho) - N(r) \leqq \frac{\log\left(\frac{\varrho}{r}\right)}{\log\left(\frac{\varrho'}{r}\right)} (N(\varrho') - N(r)) \leqq \frac{\log\left(\frac{\varrho}{r}\right)}{\log\left(\frac{\varrho'}{r}\right)} N(\varrho')$$

sein. Bemerkt man, daß $\log\left(\frac{\varrho}{r}\right) \leqq \frac{\varrho - r}{r}$ und $\log\left(\frac{\varrho'}{r}\right) > \frac{\varrho' - r}{2r}$ ist, so folgt hieraus

$$N(\varrho) - N(r) < 2\,\frac{\varrho - r}{\varrho' - r} N(\varrho').$$

Jetzt verfügen wir über die Zahl $\varrho$ so, daß

$$2\,\frac{\varrho - r}{\varrho' - r} N(\varrho') = 1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{\varrho - r} = 2\,\frac{N(\varrho')}{\varrho' - r}$$

wird, wozu $2N(\varrho') > 1$ nötig ist, was aber stets angenommen werden kann, da andernfalls eine weitere Abschätzung der rechten Seite in (36) unnötig wäre. Wir erhalten dann

$$\log \frac{1}{\varrho - r} = \log 2 + \log \frac{1}{\varrho' - r} + \log N(\varrho')$$

und nach Einsetzen dieses Ausdruckes in (36), indem wir noch $\varrho$ statt $\varrho'$ schreiben,

$$\mu(r) < \log \frac{1}{\varrho - r} + \log N(\varrho) + O(1), \qquad (r < \varrho < 2r). \tag{37}$$

Um diesen Ausdruck weiter zu vereinfachen, erinnern wir daran, daß nach (28)

$$N(\varrho) = \sum_{\nu=1}^{q-1} N(\varrho; a_\nu) + N(\varrho; \infty) + N_2(\varrho),$$

wo für alle $\varrho > 1$

$$N_2(\varrho) = \frac{1}{k} \int_0^{\varrho} \frac{n_2(t) - n_2(0)}{t}\, dt + \frac{n_2(0)}{k} \log \varrho \leqq N(\varrho, z'),$$

und daß infolgedessen die Abschätzung

$$N(\varrho) < q\, T(r, z) + N(\varrho, z') + O(1) \tag{38}$$

für alle $\varrho > 1$ besteht.

Durch Differentiation der Gleichung (1) erhalten wir ferner

$$z'(x) = -\frac{\{z(x)\}^{k-1} A_1'(x) + \ldots + A_k'(x)}{k\{z(x)\}^{k-1} + \ldots + A_{k-1}(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ höchstens $k$-deutige algebroide Funktionen sind [10]).

[10]) Sie können nicht identisch verschwinden, denn sonst wäre ja die Gleichung (1), gegen Voraussetzung, irreduzibel.

Also gilt nach dem ersten Hauptsatz für $\varrho \geqq 1$

$$N(\varrho, z') \leqq N(\varrho, \varphi) + N\left(\varrho, \frac{1}{\psi}\right) = N(\varrho, \varphi) + T(\varrho, \psi) + O(1).$$

Ist $A$ eine meromorphe Funktion und $A'$ ihre Ableitung, so muß $N(\varrho, A') \leqq 2N(\varrho, A)$ für $\varrho \geqq 1$ sein, und man schließt hieraus leicht unter Berücksichtigung von (16) S. 716, daß

$$N(\varrho, \varphi) = O(N(\varrho, z)) = O(T(\varrho, z)) \qquad (\varrho \geqq 1).$$

Ebenso erhalten wir nach (17)

$$T(\varrho, \psi) = O(T(\varrho, z)) + O(1) \qquad (\varrho \geqq 1),$$

und daher

$$N(\varrho, z') = O(T(\varrho, z)) + O(1) \qquad (\varrho \geqq 1). \tag{39}$$

Da $z(x)$ nach Voraussetzung keine Konstante ist, kann $T(r, z)$ nicht beschränkt sein. Von einem gewissen Wert $r = r_1$ ab ist also $T(r, z) > 1$, die Verbindung von (37) mit (38) und (39) gibt demnach

$$\mu(r) < \log \frac{2}{\varrho - r} + \log T(\varrho, z) + O(1) \qquad (r > r_1,\ r \geqq 1). \tag{40}$$

**11.** In der weiteren Behandlung dieser Ungleichung unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem

$$\sigma = \overline{\lim} \frac{\log T(r, z)}{\log r}$$

endlich oder unendlich ist. In Übereinstimmung mit bekannten Definitionen sagen wir dementsprechend, daß $z(x)$ von endlicher Ordnung $\sigma$ bzw. unendlich hoher Ordnung ist.

Der erste Fall erledigt sich sofort, wenn man in (40) z. B. $\varrho = 2r$ setzt, woraus

$$\mu(r) < (\sigma - 1 + \varepsilon) \log r \qquad (r > r_\varepsilon,\ \varepsilon \text{ beliebig klein} > 0) \tag{40}'$$

folgt.

Ist dagegen $z(x)$ von unendlich hoher Ordnung, so machen wir von der bekannten Borelschen Ungleichung Gebrauch, nach welcher

$$T\left(r + \frac{1}{\log T(r, z)}, z\right) < [T(r, z)]^k, \text{ wo } k > 1,$$

für alle $r$ besteht, höchstens mit Ausnahme einer Wertmenge $I_k(r)$ von endlichem Gesamtmaß. Setzen wir demnach in (40)

$$\varrho = r + \frac{1}{\log T(r, z)},$$

so ergibt sich

$$\mu(r) < O(\log T(r, z)), \tag{40}''$$

außer, möglicherweise, für eine Wertmenge $I(r)$ von endlichem Gesamtmaß.

**12.** Andererseits kann man für $\mu(r)$ eine Abschätzung nach unten angeben. Infolge der Definition dieser Größe (vgl. (24) und (19)) ist nämlich

$$\mu(r) = \frac{1}{2k\pi}\sum_{\nu=1}^{i}\int_{I_\nu} v(re^{i\varphi})\,d\varphi = \frac{1}{2k\pi}\sum_{\nu=1}^{i}\int_{I_\nu} u(z(re^{i\varphi});\ a_1, \ldots, a_{q-1}, \infty)\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2k\pi}\sum_{\nu=1}^{i}\int_{I_\nu}\log|z'(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \mu_1(r) + \mu_2(r),$$

wo gemäß dem ersten Hauptsatz

$$\mu_2(r) = N\Big(r, \frac{1}{z'}\Big) - N(r, z') + O(1). \tag{41}$$

Für $\mu_1(r)$ erhalten wir auf Grund (7) und (7)′ indem wir von (31) Gebrauch machen,

$$\mu_1(r) > \sum_{\nu=1}^{q-1} m(r; a_\nu) - m(r; \infty) - \sum_{\nu=1}^{q-1}\overset{+}{\log}\, m(r; a_\nu) - \overset{+}{\log}\, m(r; \infty) + O(1).$$

Setzen wir nun $\infty = a_q$, und bemerken wir noch, daß für hinreichend große $r$

$$\sum_{\nu=1}^{q}\overset{+}{\log}\, m(r; a_\nu) + O(1) = O(\log T(r, z))$$

ist, so gelangen wir durch Anwendung des ersten Hauptsatzes zu der Ungleichung

$$\mu_1(r) > (q-2)\,T(r, z) - \sum_{\nu=1}^{q} N(r; a_\nu) + 2N(r, z) + O(\log T(r, z)),$$

woraus sich nach Addition von (41) die erwünschte Abschätzung für $\mu(r)$ ergibt:

$$\mu(r) > (q-2)\,T(r, z) - \sum_{\nu=1}^{q} N(r; a_\nu) + \overline{N}(r, z) + O(\log T(r, z)), \tag{42}$$

wo

$$\overline{N}(r, z) = 2N(r, z) + N\Big(r, \frac{1}{z'}\Big) - N(r, z').$$

Die Größe $\overline{N}(r, z)$ hat folgende Bedeutung: In jedem Punkte $\alpha$ der Riemannschen Fläche $F$ besitzt $z(x)$ eine Entwicklung

$$z(x) = P\{\sqrt[\lambda]{x-\alpha}\} = \gamma_0 + \gamma_1(\sqrt[\lambda]{x-\alpha})^\tau + \ldots \qquad (\gamma_1 \neq 0,\ \tau > 0)$$

bzw.

$$z(x) = P\{\sqrt[\lambda]{x-\alpha}\} = \frac{\gamma_1}{(\sqrt[\lambda]{x-\alpha})^\tau} + \ldots \qquad (\gamma_1 \neq 0,\ \tau > 0),$$

wo die Zahl $\lambda$ angibt, wie viele Blätter im Punkte $\alpha$ im Zyklus zusammenhängen. Setzen wir

$$\overline{n}(r, z) = \sum_{|\alpha| \leqq r} (\tau - \lambda), \tag{43}$$

wobei die Summe über sämtliche Punkte $\alpha$ erstreckt werden soll, die im Kreise $|\alpha| \leqq r$ liegen, so wird

$$(44) \qquad \bar{N}(r, z) = \frac{1}{k}\int_0^r \frac{\bar{n}(t, z) - \bar{n}(0, z)}{t}\, dt + \frac{\bar{n}(0, z)}{k} \log r.$$

Man beachte, daß die Summe $\bar{n}(r, z)$ nur von den mehrfachen Stellen von $z(x)$ und den Windungspunkten von $F$ Beiträge erhalten kann.

**13.** Aus den Ungleichungen $(46)'$, $(40)''$ und (42) folgt nun die in Aussicht gestellte Erweiterung des zweiten Hauptsatzes:

Satz II (Zweiter Hauptsatz). *Es sei $z(x)$ algebroid in der ganzen endlichen Ebene, und $a_1, \ldots, a_q$ $q$ verschiedene, endliche oder unendliche, Werte. Dann ist von einem gewissen $r$ ab*

$$(45) \quad (q-2)\, T(r, z) < \sum_{\nu=1}^{q} N(r; a_\nu) - \bar{N}(r, z) + O(\log T(r, z) + \log r)$$

*außer möglicherweise — falls $z(x)$ von unendlich hoher Ordnung ist — für eine Wertmenge $I(r)$ von endlichem Gesamtmaß.*

Zunächst gilt diese Ungleichung unter der Voraussetzung $a_q = \infty$; aber von dieser Einschränkung befreit man sich leicht, wenn man (45) auf die $q+1$ Werte $a_1, \ldots, a_q, a_{q+1} = \infty$ anwendet und dabei bedenkt, daß die Ungleichung a fortiori besteht, wenn man rechts um $N(r, \infty)$, links um $T(r, z)$ vermindert.

**15.** Dieser Satz enthält als unmittelbare Folgerung u. a. den klassischen Picardschen Satz. Denn ist $z(x)$ eine eindeutige meromorphe Funktion, so ist $\bar{N}(r, z) \geqq 0$ für $r \geqq 1$, kann somit in der Ungleichung (45) fortgelassen werden, dagegen läßt sich offenbar a priori nichts über das Vorzeichen der Größe $\bar{N}(r, z)$ sagen, wenn $z(x)$ eine mehrdeutige Funktion ist, eine Tatsache, die eine Erhöhung der Anzahl der Ausnahmewerte bewirken kann. Um auch in diesem Falle eine Aussage über die Wertverteilung zu erhalten, erübrigt noch eine Abschätzung der Größe $\bar{N}(r, z)$ nach unten.

**16.** Durch eine geeignete lineare Transformation von $z(x)$, welche die Größe $\bar{N}(r, z)$ invariant läßt und die Größe $T(r, z)$ nur um ein additives Glied $O(1)$ ändert, erreichen wir, daß keine $\infty$-Stelle über einem der Verzweigungspunkte von $F$ fällt.

Da sowohl $\lambda$ wie $\tau$ ganze positive Zahlen $\geqq 1$ sind, muß

$$\bar{n}(r, z) = \sum_{|\alpha_i| \leqq r} (\tau - \lambda) \geqq - \sum_{|\alpha_i| \leqq r} (\lambda - 1)$$

sein. Die Diskriminante der Gleichung (1):

$$D(x) = \prod_{\nu \neq \mu} (z_\nu(x) - z_\mu(x))^2$$

ist eine eindeutige meromorphe Funktion. Wegen unserer Voraussetzung über die $\infty$-Stellen von $z(x)$ verschwindet $D(x)$ in jedem Verzweigungspunkte der Fläche $F$, und zwar ist, wie man leicht nachprüft,

$$n\left(r, \frac{1}{D}\right) \geqq \sum_{|\alpha| \leqq r} (\lambda - 1).$$

Nach (44) erhalten wir deshalb für $r \geqq 1$

$$\overline{N}(r, z) \geqq -\frac{1}{k} N\left(r, \frac{1}{D}\right),$$

und hieraus, auf Grund des ersten Hauptsatzes, für $r \geqq 1$

$$\overline{N}(r, z) \geqq -\frac{1}{k} N(r, D) - \frac{1}{k} m(r, D) - O(1). \tag{46}$$

Es ist ferner

$$n(r, D) \leqq (2k - 2)\, n(r, z),$$

infolgedessen, für $r \geqq 1$,

$$\frac{1}{k} N(r, D) \leqq (2k - 2)\, N(r, z). \tag{47}$$

Wegen

$$\overset{+}{\log} |D(x)| \leqq (2k - 2) \sum_{\nu=1}^{k} \overset{+}{\log} |z_\nu(x)| + O(1)$$

erhält man ebenso

$$\frac{1}{k} m(r, D) \leqq (2k - 2)\, m(r, z) + O(1), \tag{48}$$

und schließlich, nach Einsetzen der Abschätzungen (47) und (48) in (46),

$$\overline{N}(r, z) > -(2k - 2)\, T(r, z) - O(1),$$

für $r \geqq 1$.

Mit Hilfe der letzten Ungleichung ergibt sich aus dem zweiten Hauptsatz:

Satz III. *Es sei $z(x)$ in der ganzen endlichen Ebene algebroid und $k$ die Anzahl ihrer Zweige. Es sei ferner $a_1, \ldots, a_q$ $q$ verschiedene, endliche oder unendliche Werte. Dann ist von einem gewissen $r$ ab*

$$(q - 2k)\, T(r, z) < \sum_{\nu=1}^{k} N(r; a_\nu) + O(\log T(r, z) + \log r), \tag{49}$$

*außer möglicherweise — falls $z(x)$ von unendlich hoher Ordnung ist — für eine Wertmenge $I(r)$ von endlichem Gesamtmaß.*

**17.** Wir werden hier in aller Kürze einige der wichtigsten Folgerungen dieses Satzes besprechen.

Es sei zunächst $z(x)$ keine algebraische Funktion und also nach § 3, Nr. 7

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, z)}{\log r} = \infty.$$

Es ist eine unmittelbare Konsequenz der Ungleichung (49), daß unter dieser Voraussetzung höchstens $2k$ verschiedene Werte vorhanden sind, welche $z(x)$ nur endlich oft annimmt.

Daß die Maximalanzahl $2k$ auch tatsächlich erreicht wird, zeigt schon das Beispiel $\sqrt[k]{\operatorname{tg} x}$.

Die Verallgemeinerung des Picardschen Satzes auf algebroide Funktionen, welche wir somit erhalten haben, ist auf anderem Wege — mit Hilfe Borelscher Identitäten — schon früher von Herrn Rémoundos hergeleitet worden[11]), der auch die analoge Erweiterung in bezug auf Ausnahmewerte im *Borelschen* Sinne gegeben hat. Ohne auf diese Erweiterung, welche sich leicht aus (49) ableiten läßt, näher einzugehen, wollen wir lieber im Anschluß an Herrn R. Nevanlinna einen Satz beweisen, der in sehr anschaulicher und eleganter Form den wesentlichen Inhalt der Ungleichung (49) zum Ausdruck bringt.

Jedem Wert $a$ ordne man die im Intervalle $0 \leqq \Theta \leqq 1$ gelegene Zahl

$$\Theta(a) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r; a)}{T(r, z)} = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r; a)}{T(r, z)}$$

zu. Die so erklärte Zahl $\Theta(a)$ nennen wir den Defekt des Wertes $a$ in bezug auf $z(x)$. Ist $\Theta(a) > 0$, so sagen wir, daß $a$ ein Ausnahmewert der Funktion $z(x)$ ist, eine Bezeichnung, deren Berechtigung aus dem folgenden Satz hervorgeht:

Satz IV. *Die Menge der Ausnahmewerte einer Funktion $z(x)$, die im Endlichen algebroid und $k$-deutig ist, ist abzählbar, und die über diese Menge erstreckte Defektsumme*

$$\sum \Theta(a)$$

*ist konvergent und höchstens gleich $2k$.*

Da eine algebraische Funktion, wie leicht einzusehen ist, eine Defektsumme $\leqq k$ hat, können wir beim Beweise des Satzes von diesem Falle absehen. Durch Division der Ungleichung (49) mit $T(r, z)$ erhalten wir dann für $r \to \infty$:

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Theta(a_\nu) \leqq 2k. \tag{50}$$

Hieraus ersieht man, daß, wenn $\delta$ eine vorgegebene reelle Zahl $> 0$ ist, nur endlich viele Werte vorhanden sind, deren Defekte $\geqq \delta$ ausfallen, ein Verhältnis, das wieder die Abzählbarkeit der Ausnahmewerte zur Folge hat. Der letzte Teil des Satzes ist dann nach (50) einleuchtend.

---

[11]) Loc. cit.

Auch hier ist die Schranke $2k$ genau. Dies zeigt die schon erwähnte Funktion $\sqrt[k]{\operatorname{tg} x}$. Ein weiteres Beispiel mit dieser extremen Defektsumme können wir in folgender Weise bilden:

Die ganze Funktion[12])

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^q}\, dt,$$

wo $q$ ganzzahlig und $>1$ ist, hat die Defektsumme 2, während die Anzahl ihrer Ausnahmewerte gleich $q+1$ ist. Von diesen besitzt der Wert $\infty$ den Defekt 1, die übrigen $a_1, \ldots, a_q$ den Defekt $\frac{1}{q}$. Die algebroide Funktion

$$\sqrt[k]{\frac{f(x)-b}{f(x)-c}},$$

wo $b$ und $c$ von den Werten $a_1, \ldots, a_q, \infty$ verschieden sind, besitzt, wie man leicht bestätigt, eine Defektsumme gleich $2k$, während die Anzahl ihrer Ausnahmewerte gleich $k(q+1)$ ist. Von diesen haben $k$ den Defekt 1, der Rest den Defekt $\frac{1}{q}$.

Bergen, am 21. März 1929.

---

[12]) R. Nevanlinna, loc. cit. S. 96.

(Eingegangen am 6. April 1929.)

# Über Beziehungen zwischen der Zahl $e$ und Liouvilleschen Zahlen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

## § 1.

Bekanntlich ist die Zahl $e$ keine Liouvillesche Zahl; dabei sind unter Liouvilleschen Zahlen solche Zahlen $u$ zu verstehen, die zu jeder noch so großen positiven Zahl $\omega$ rationale Annäherungen $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$, mit

$$0 < \left| u - \frac{x}{y} \right| < y^{-\omega}$$

besitzen. In der vorliegenden Note soll folgendes allgemeinere Ergebnis gezeigt werden:

*Das Polynom $F(v, w) \not\equiv 0$ habe rationale Koeffizienten. Ist dann $e = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}$ und $u$ eine beliebige Liouvillesche Zahl, so verschwindet die Zahl $F(e, u)$ nicht.*

## § 2.

Definition. Eine Zahl $s$ heiße $S$-Zahl, wenn es eine positive Zahl $\gamma$ und zu jeder natürlichen Zahl $m$ eine positive Zahl $\Gamma(m)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

Sind $a_0, a_1, \ldots, a_m$ $m+1$ ganze rationale Zahlen und ist

$$a = \max(|a_0|, \ldots, |a_m|),$$

so ist entweder

$$\sum_{h=0}^{m} a_h s^h = 0$$

oder

$$\left| \sum_{h=0}^{m} a_h s^h \right| \geqq \Gamma a^{-\gamma m}.$$

Hilfssatz 1. Sei $t$ eine $S$-Zahl, $s$ eine Wurzel der Gleichung

$$C(s|t) \equiv \sum_{i=0}^{f} C_i(t)\, s^i = 0; \qquad C_i(t) = \sum_{j=0}^{g} C_{ij}\, t^j, \qquad C_f(t) \neq 0,$$

wo die Koeffizienten $C_{ij}$ ganze rationale Zahlen sind. Dann ist auch $s$ eine $S$-Zahl.

Zunächst wurde gezeigt, daß algebraische Zahlen stets $S$-Zahlen sind. Sei etwa $s$ algebraisch vom Grad $f$, seien ferner

$$s_0 = s, s_1, \ldots, s_{f-1}$$

die zu $s$ konjugierten Zahlen und bedeute $S$ den gemeinsamen Nenner. Dann sind die Zahlen

$$\sum_{h=0}^{m} a_h s_\nu^h \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, f-1),$$

wobei

$$a_0, a_1, \ldots, a_m$$

$m+1$ ganze rationale Zahlen mit

$$a = \max(|a_0|, \ldots, |a_m|)$$

bedeuten, alle zur selben Zeit gleich Null oder ungleich Null. Im letzteren Fall ist das Produkt

$$S^{fm} \prod_{\nu=0}^{f-1} \Big( \sum_{h=0}^{m} a_h s_\nu^h \Big)$$

von Null verschieden und als symmetrische Funktion der $s_\nu$ ganz rational, also mindestens vom Absolutbetrag Eins. Folglich ist

$$\Big| \sum_{h=0}^{m} a_h s^h \Big| \geqq S^{-fm} \Big( \prod_{\nu=1}^{f-1} \Big\{ \sum_{h=0}^{m} |s_\nu|^h \Big\} \Big)^{-1} a^{-(f-1)} \geqq \Gamma(m)\, a^{-\gamma m}; \quad \gamma = f-1.$$

Jetzt werde zum Beweis des Hilfssatzes übergegangen. In der Gleichung

$$C(s|t) \equiv \sum_{i=0}^{f} C_i(t)\, s^i = 0$$

kann die linke Seite in $s$ und $t$ irreduzibel in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen angenommen werden; ferner seien ohne Einschränkung die beiden Zahlen $s$ und $t$ transzendent. Die vermöge der Gleichung

$$C(s|t) = 0$$

zu $s$ konjugierten Zahlen

$$s_0 = s, s_1, \ldots, s_{f-1}$$

sind dann gleichfalls alle transzendent. Denn genüge etwa $s_1$ einer irreduziblen Gleichung

$$\mathfrak{C}(s_1) \equiv \sum_{i=0}^{\varphi} \mathfrak{C}_i s_1^i = 0, \qquad \mathfrak{C}_\varphi \neq 0,$$

vom Grad $\varphi$ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Aus der Transzendenz von $t$ folgt, daß das Polynom

$$C(x\,|\,t)$$

durch das Polynom

$$\mathfrak{C}(x)$$

teilbar ist; ferner ergibt sich $\varphi < f$ aus der Transzendenz von $s$; das widerspricht der angenommenen Irreduzibilität von $C(s\,|\,t)$.

Sind also

$$a_0, a_1, \ldots, a_m$$

$m+1$ ganze rationale Zahlen mit

$$a = \max(|a_0|, \ldots, |a_m|) > 0,$$

so haben die $f$ Summen

$$\sum_{h=0}^{m} a_h s_\nu^h \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, f-1)$$

sämtlich einen von Null verschiedenen Wert, also auch das Produkt

$$L(t\,|\,a_0 \ldots a_m) = C_f(t)^{fm} \prod_{\nu=0}^{f-1} \Big( \sum_{h=0}^{m} a_h s_\nu^h \Big).$$

$L(t\,|\,a_0 \ldots a_m)$ ist in den konjugierten Zahlen $s_\nu$ symmetrisch, läßt sich folglich als rationale Funktion in $t$ allein ausdrücken; da ferner durch den Faktor $C_f(t)^{fm}$ der Nenner fortgeschafft ist, so muß $L(t\,|\,a_0 \ldots a_m)$ ein Polynom in $t$ und zwar mit ganzen rationalen Koeffizienten sein. Nach bekannten Sätzen über symmetrische Funktionen läßt sich $L(t\,|\,a_0 \ldots a_m)$ in der Form

$$L(t\,|\,a_0 \ldots a_m) = C_f(t)^{fm} \cdot \sum A_{e_0 e_1 \ldots e_{f-1}} \Big( \frac{C_0(t)}{C_f(t)} \Big)^{e_0} \cdots \Big( \frac{C_{f-1}(t)}{C_f(t)} \Big)^{e_{f-1}}$$

darstellen; dabei sind die $A_{e_0 e_1 \ldots e_{f-1}}$ Formen in den $a_h$ der Dimension $f$, deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind; summiert wird über die Indizes $e_0, e_1, \ldots, e_{f-1}$ mit

$$f e_0 + (f-1) e_1 + \ldots + 2 e_{f-2} + e_{f-1} \leqq fm.$$

Somit nimmt $L(t\,|\,a_0 \ldots a_m)$ die Gestalt

$$L(t\,|\,a_0 \ldots a_m) = \sum_{l=0}^{fgm} A_l t^l$$

an; dabei sind die $A_l$ ganze rationale Zahlen und es gibt eine positive Konstante $\alpha$, so daß

$$|A_l| \leqq \alpha a^f \qquad (l = 0, 1, \ldots, fgm)$$

ist.

Da nach Voraussetzung

$$L(t\,|\,a_0 \ldots a_m) \neq 0,$$

da ferner $t$ eine $S$-Zahl ist, etwa mit den Konstanten $\gamma > 0$ und $\Gamma(m) > 0$, so wird schließlich:

$$|\,L(t\,|\,a_0 \ldots a_m)\,| \geqq \Gamma(fgm)\,(\alpha a^f)^{-\gamma f g m},$$

und nach der Definition von $L(t\,|\,a_0 \ldots a_m)$:

$$\left|\sum_{h=0}^{m} a_h s^h\right| = \left|C_f(t)^{-fm} \prod_{\nu=1}^{f-1} \left(\sum_{h=0}^{m} a_h s_\nu^h\right)\right|^{-1} |\,L(t\,|\,a_0 \ldots a_m)\,|$$

$$\geqq |\,C_f(t)\,|^{-fm} \prod_{\nu=1}^{f-1} \left(\sum_{h=0}^{m} |\,s_\nu\,|^h\right)^{-1} a^{-(f-1)}\,\Gamma(fgm)\,(\alpha a^f)^{-\gamma f g m}$$

und erst recht:

$$\left|\sum_{h=0}^{m} a_h s^h\right| \geqq \Delta(m)\, a^{-\delta m};$$

dabei ist

$$\delta = \gamma f^2 g + f - 1$$

eine von $m$ unabhängige Konstante und $\Delta(m)$ eine positive Zahl, die noch von $m$ abhängt. Das ist gerade die Behauptung.

## § 3.

Hilfssatz 2. Die Zahl $e$ ist eine $S$-Zahl.

Wegen dieses Satzes sei auf die Arbeit: „Zur Transzendenz von $e$“ von J. Popken in der Math. Zeitschr. Bd. 29, S. 525, verwiesen. Dort wird unter anderem gezeigt, daß für die Konstante $\gamma$ jede Zahl größer als Eins genommen werden darf.

## § 4.

Da $e$ eine $S$-Zahl ist, ist dasselbe der Fall für jede Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten Polynome in $e$ mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sind. Daraus folgt unter anderem die Aussage über Beziehungen zu Liouvilleschen Zahlen, denn diese sind gewiß keine $S$-Zahlen. Allgemeiner ergibt dasselbe für alle Zahlen, die keine $S$-Zahlen sind oder die, roh gesprochen, sich durch algebraische Zahlen zu gut approximieren lassen.

Göttingen, 9. 5. 1929.

(Eingegangen am 18. Mai 1929.)

# Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen.

Zweite Mitteilung.

Von

Richard Brauer in Königsberg i. Pr.

Die vorliegende Arbeit schließt sich eng an die erste Mitteilung[1]) an, deren Ergebnisse weitgehend verwendet werden. Es sollen einige Sätze behandelt werden, die die Berechnung des Index einer Gruppe in bezug auf einen Zahlkörper erleichtern. In einer früheren Arbeit[2]) habe ich den folgenden Satz bewiesen: Besitzt eine Gruppe linearer Substitutionen $a$ Invarianten vom Grade $n$, so können in dem Index der Gruppe in bezug auf irgendeinen Zahlkörper nur Primzahlen aufgehen, die in $a \cdot n$ aufgehen. Im § 1 der vorliegenden Arbeit soll dieses Ergebnis verschärft und verallgemeinert werden; insbesondere wird gezeigt, daß die zu $n$ teilerfremden Primzahlen im Index in höchstens derselben Potenz wie in $a$ aufgehen. Ein Hilfssatz, der beim Beweise eine Rolle spielt, wird im § 2 bewiesen. Mit Hilfe dieses Hilfssatzes wird im § 3 ein von Herrn I. Schur für Gruppen endlicher Ordnung bewiesener Satz[3]) auf unendliche Gruppen übertragen. Im § 4 wird gezeigt, daß man die Behandlung von Gruppen mit beliebigem Index $m$ immer auf den Fall zurückführen kann, daß $m$ eine Primzahlpotenz ist. Schließlich werden im § 5 einige Beispiele behandelt, und zwar werden zu jedem vorgeschriebenen Grad $f$ endliche Gruppen konstruiert, für die der Index in bezug auf den Körper des Charakters den maximalen möglichen Wert $f$ hat. Ferner wird an einem Beispiel gezeigt, daß der

[1]) Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 677–696. Diese Arbeit wird hier mit U I zitiert.

[2]) Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1926, S. 410–416 (hier mit B zitiert).

[3]) Arithmetische Untersuchungen über Gruppen endlicher Ordnung, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1906, S. 164–184 (hier mit S zitiert).

Exponent des Faktorensystems einer Gruppe nicht mit dem Index übereinzustimmen braucht, daß er also eine neue, für das Verhalten einer Gruppe in bezug auf einen Zahlkörper charakteristische Größe darstellt.

## § 1.

$\mathfrak{H}$ sei eine irreduzible Gruppe linearer Substitutionen vom Grade $f$, deren Charakter dem vorgegebenen Grundkörper $\mathsf{K}$ angehört. $\mathfrak{H}$ sei in dem algebraischen Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ vom Grade $r$ über $\mathsf{K}$ rational. Sind $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ die Konjugierten zu $\vartheta$, so mögen $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_r$ die zugehörigen, zu $\mathfrak{H}$ algebraisch konjugierten Gruppen bezeichnen[4]). Das Faktorensystem von $\mathfrak{H}$ bestehe aus den $r^3$ Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r)$. Wie in U I § 1 auseinandergesetzt ist, gibt es dann $r^2$ Matrizen $P_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$ vom Grade $f$, die die Gleichungen

$$\mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} \mathfrak{H}_\beta \tag{1}$$

$$P_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} P_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r) \tag{2}$$

erfüllen und den folgenden Bedingungen (A) genügen:

($\mathrm{A}_1$) $P_{\alpha\beta}$ ist in $\mathsf{K}(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$ rational, die Determinante $P_{\alpha\beta}$ verschwindet nicht.

($\mathrm{A}_2$) Wendet man eine Permutation $K$ der Galoisschen Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$ in bezug auf den Grundkörper $\mathsf{K}$ auf die Koeffizienten von $P_{\alpha\beta}$ an, und geht bei $K$ etwa $\vartheta_\alpha$ in $\vartheta_\gamma$, $\vartheta_\beta$ in $\vartheta_\delta$ über, so geht $P_{\alpha\beta}$ in $P_{\gamma\delta}$ über.

($\mathrm{A}_3$) $P_{11}$ ist die Einheitsmatrix.

Falls es für eine reduzible Gruppe $\mathfrak{H}$ Matrizen $P_{\alpha\beta}$ gibt, die den Bedingungen (A) genügen und die Gleichungen (1) und (2) erfüllen, wobei $c_{\alpha\beta\gamma}$ Zahlenfaktoren sind, so schließt man leicht, daß diese Zahlenfaktoren die charakteristischen Eigenschaften eines Faktorensystems haben (vgl. U I § 2). Wir wollen dann sagen, es sei möglich, der Gruppe das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ beizulegen. Es kann aber bei reduziblen Gruppen $\mathfrak{H}$ der Fall eintreten, daß man $\mathfrak{H}$ gar kein oder auch mehrere wesentlich verschiedene Faktorensysteme beilegen kann.

Es sei jetzt eine ganze rationale irreduzible Darstellung $\mathfrak{R}$ der allgemeinen linearen Gruppe in $f$ Variablen gegeben[5]); jeder Matrix $M$ des Grades $f$ ist eine andere Matrix $R(M)$ eines wohlbestimmten Grades $k$ zugeordnet, derart, daß stets $R(M_1) \cdot R(M_2) = R(M_1 M_2)$ gilt. Die Elemente von $R(M)$ sind ganze rationale homogene Funktionen der Elemente von $M$;

[4]) Entsprechend sei die Bezeichnung bei anderen in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rationalen Gruppen.

[5]) Man vergleiche dazu etwa I. Schur, Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1927, S. 58–75.

die Koeffizienten dieser Funktionen können als rationale Zahlen angenommen werden. Ist die Dimension der Funktionen $n$, so soll $\mathfrak{R}$ als Darstellung der Ordnung $n$ bezeichnet werden. Ist $c$ irgendeine Zahl, so gilt

$$R(cE_f) = c^n E_k \quad [6]). \tag{3}$$

$\mathfrak{H}$ werde jetzt wieder irreduzibel vorausgesetzt. Bildet man für jedes $H < \mathfrak{H}$ die Matrix $R(H)$, so erhält man offenbar eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe, in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rationale Gruppe $\mathfrak{G} = R(\mathfrak{H})$. Setzt man

$$R(P_{\alpha\beta}) = Q_{\alpha\beta}, \qquad C_{\alpha\beta\gamma} = c^n_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

so folgt durch Anwendung von $R$ auf (1) und (2) unter Berücksichtigung von (3)

$$\mathfrak{G}_\alpha Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\beta \tag{5}$$

$$Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r). \tag{6}$$

Die Matrizen $Q_{\alpha\beta}$ erfüllen offenbar auch die Bedingungen (A). Wegen (5) sind $\mathfrak{G}_\alpha$ und $\mathfrak{G}_\beta$ ähnlich; also haben $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots, \mathfrak{G}_r$ alle denselben Charakter, der Charakter von $\mathfrak{G}$ gehört folglich zu $\mathsf{K}$.

Daher kann man der Gruppe $\mathfrak{G}$ das Faktorensystem $C_{\alpha\beta\gamma}$ beilegen. Nun gilt der

Hilfssatz. *$\mathfrak{G}$ sei eine in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rationale Gruppe, deren Charakter zu $\mathsf{K}$ gehört. Es sei möglich, der Gruppe $\mathfrak{G}$ das Faktorensystem $C_{\alpha\beta\gamma}$ vom Index $w$ beizulegen. $\mathfrak{A}$ sei ein irreduzibler Bestandteil von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{G}$ insgesamt $a$-mal vorkomme, $\mu$ sei der Schursche Index von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathsf{K}$, $t$ sei die Anzahl der verschiedenen zum Charakter von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ algebraisch konjugierten Charaktere. Dann gilt*

$$w \mid \mu \cdot a \cdot t. \tag{7}$$

Um den Gedankengang hier nicht zu unterbrechen, soll der Beweis auf § 2 verschoben werden.

$\mathfrak{A}$ sei ein irreduzibler Bestandteil von $\mathfrak{G} = R(\mathfrak{H})$; $w$, $\mu$, $a$ und $t$ mögen dieselbe Bedeutung wie im Hilfssatz haben. Ferner sei $v$ der Exponent des Faktorensystems $C_{\alpha\beta\gamma}$; nach B Satz I ist $v$ ein Teiler von $w$. Dann ist $C^v_{\alpha\beta\gamma}$ und wegen (4) also $c^{vn}_{\alpha\beta\gamma}$ dem Einheitssystem assoziiert. Der Exponent $l$ von $c_{\alpha\beta\gamma}$ ist daher ein Teiler von $v \cdot n$, also auch von $w \cdot n$ und wegen (7) auch von $\mu \cdot a \cdot t \cdot n$.

$p$ sei eine Primzahl, die nicht in $n$ aufgeht; im Index $m$ von $\mathfrak{H}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ sei $p$ genau in der Potenz $p^e$ enthalten. Die Gruppe $\mathfrak{H}^n = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \times \ldots \times \mathfrak{H}$ besitzt das Faktorensystem $C_{\alpha\beta\gamma} = c^n_{\alpha\beta\gamma}$ [7]), sie besitzt also den Schurschen

[6]) Mit $E_q$ werde allgemein die Einheitsmatrix vom Grade $q$ bezeichnet.

[7]) Man vgl. U I § 1.

Index $w$ in bezug auf $\mathsf{K}$ und ist daher in einem algebraischen Körper $\mathsf{K}(\eta)$ vom Grade $w$ über $\mathsf{K}$ rational darstellbar. In bezug auf $\mathsf{K}(\eta)$ als Grundkörper besitze $\mathfrak{H}$ den Schurschen Index $m'$; $l'$ sei dann der Exponent des Faktorensystems von $\mathfrak{H}$. Da $\mathfrak{H}^n$ in $\mathsf{K}(\eta)$ rational darstellbar ist, folgt $l' | n$. Daher ist $l'$ zu $p$ teilerfremd; nach B Satz I ist dann $m'$ ebenfalls zu $p$ teilerfremd. Ist nun $\mathsf{K}(\zeta)$ ein Körper vom Relativgrad $m'$ über $\mathsf{K}(\eta)$, in dem $\mathfrak{H}$ rational darstellbar ist, so hat $\mathsf{K}(\zeta)$ den Grad $m' \cdot w$ über $\mathsf{K}$. Wegen der Darstellbarkeit von $\mathfrak{H}$ in $\mathsf{K}(\zeta)$ folgt $m | m'w$, also $p^\varrho | m'w$. Wegen $(p, m') = 1$ gilt $p^\varrho | w$ und wegen (7) ist $p^\varrho$ ein Teiler von $\mu \cdot a \cdot t$.

Satz I. *Der Charakter der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Grade $f$ gehöre zu $\mathsf{K}$. $\mathfrak{R}$ sei ein ganzer rationaler Homomorphismus der allgemeinen linearen Gruppe in $f$ Variablen von der Ordnung $n$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$, die durch Anwendung von $\mathfrak{R}$ auf die Elemente von $\mathfrak{H}$ entsteht, enthalte einen irreduziblen Bestandteil $\mathfrak{A}$ in der Vielfachheit $a$; $\mu$ sei der Schursche Index von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathsf{K}$, $t$ die Anzahl der zum Charakter von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ algebraisch konjugierten Charaktere. Ist $p$ eine zu $n$ teilerfremde Primzahl, so geht $p$ im Schurschen Index $m$ von $\mathfrak{H}$ in höchstens derselben Potenz wie in $\mu \cdot a \cdot t$ auf. Der Exponent des Faktorensystems von $\mathfrak{H}$ ist ein Teiler von $\mu \cdot a \cdot t \cdot n$.*

Für die Anwendung dieses Satzes ist zu bemerken, daß man $n$ bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{R}$ beliebig wählen kann. Für $\mathfrak{A}$ kann man eine beliebige zu $\mathfrak{H}$ homomorphe Gruppe nehmen. Ist etwa $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe, so sind die Zahlen $a$ und $t$ allein aus den Gruppencharakteren von $\mathfrak{H}$ zu berechnen.

$\mathfrak{A}$ sei jetzt speziell die Gruppe 1. Grades, bei der alle Elemente 1 sind (Hauptdarstellung). Dann ist $\mu = 1$, $t = 1$. Falls $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel ist, so kann man $a$ als die Anzahl der linear unabhängigen Invarianten deuten, die zu dem durch den Homomorphismus $\mathfrak{R}$ bestimmten Typ[8]) gehören; $n$ ist der Grad der Invarianten. Folglich gehen die zu $n$ teilerfremden Primzahlen in $m$ in höchstens derselben Potenz wie in $a$ auf.

Bei anderer Schlußweise erkennt man, daß die Voraussetzung der vollständigen Reduzibilität von $\mathfrak{G}$ überflüssig ist. Besitzt nämlich $\mathfrak{H}$ genau $a$ linear unabhängige Invarianten $n$-ten Grades (von irgendeinem Typ), so gibt es, wie in B § 3, S. 415 gezeigt wird, Matrizen $A_{\alpha\beta}$ vom Grade $a$, die den Bedingungen (A) genügen, und für die

$$A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} = c^n_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta}$$

gilt. Dann folgt aus UI § 1 Satz III, daß der Index $w$ von $c^n_{\alpha\beta\gamma}$ ein Teiler von $a$ ist. Ist nun $(p, n) = 1$, $p^\varrho | m$, so folgt wie eben $p^\varrho | w$. Daher gilt $p^\varrho | a$.

[8]) Man vgl. dazu B § 3.

Satz II. *Besitzt die Gruppe $\mathfrak{H}$ genau $a$ linear unabhängige Invarianten (irgendeines Typs)*[8]) *vom Grade $n$, und ist die Primzahl $p$ zu $n$ teilerfremd, so geht $p$ in dem Index von $\mathfrak{H}$ in bezug auf den Grundkörper* K *in höchstens derselben Potenz wie in $a$ auf.*

Man kann analoge Betrachtungen auch bei Relativinvarianten anstellen. $\lambda$ sei eine lineare Darstellung von $\mathfrak{H}$; $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ seien die $t$ zu $\lambda$ bezüglich K konjugierten Darstellungen. Man kann im Fall der vollständigen Reduzibilität von $\mathfrak{G}$ dann $a' = a \cdot t$ als die Gesamtanzahl der linear unabhängigen Relativinvarianten von $\mathfrak{H}$ von dem durch $\mathfrak{R}$ bestimmten Typ deuten, die zu einem der linearen Charaktere $\lambda_\tau$ gehören $(\tau = 1, 2, \ldots, t)$. Von der Voraussetzung der vollständigen Reduzibilität kann man sich wie beim Beweis von Satz II befreien.

Satz III. *Besitzt $\mathfrak{H}$ insgesamt genau $a'$ linear unabhängige Relativinvarianten $n$-ten Grades (von irgendeinem Typ), die zu einem der algebraisch in bezug auf* K *konjugierten linearen Charaktere $\lambda_\tau$ $(\tau = 1, 2, \ldots, t)$ gehören, so gehen im Index $m$ von $\mathfrak{H}$ in bezug auf* K *nur Primzahlen $p$ auf, die in $a' \cdot n$ aufgehen. Ist $(p, n) = 1$, so geht $p$ in $m$ in höchstens derselben Potenz wie in $a'$ auf.*

Jetzt nehmen wir an, daß $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $\mathfrak{D}$ sei[9]) und fragen, ob man die Betrachtungen auf den Fall übertragen kann, daß $\mathfrak{R}$ eine ganze rationale Darstellung von $\mathfrak{D}$ sei, bzw. daß es sich um Orthogonalinvarianten handelt. Offenbar gilt alles ganz analog, falls $P_{\alpha\beta}$ orthogonal ist[10]), da man $R$ auf (1) und (2) anwenden kann. Es sei nun

$$J = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_f^2 .$$

Dann ist $J$ nach Voraussetzung eine Invariante von $\mathfrak{H}$ und damit auch von $\mathfrak{H}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$; jede andere quadratische Invariante unterscheidet sich von $J$ nur um einen konstanten Faktor. Da $P_{\alpha\beta}$ aber $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}_\beta$ transformiert, ist $J_{P_{\alpha\beta}}$ ebenfalls eine quadratische Invariante von $\mathfrak{H}_\beta$, und es gilt daher

$$J_{P_{\alpha\beta}} = k_{\alpha\beta} \cdot J, \tag{8}$$

wo $k_{\alpha\beta}$ eine Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$ bedeutet. Denkt man sich nur $\mathsf{K}(\vartheta)$ eventuell durch einen umfassenderen algebraischen Körper über dem Grundkörper K ersetzt, so kann man annehmen, daß $\mathsf{K}(\vartheta)$ Normalkörper ist und

---

[9]) Gemeint ist hier die Gruppe aller reellen orthogonalen Transformationen von der Determinante $\pm 1$.

[10]) Es ist nicht erforderlich, daß $P_{\alpha\beta}$ reell sei, jede Darstellung von $\mathfrak{D}$ liefert auch eine Darstellung der komplexen orthogonalen Gruppe.

alle Zahlen $\sqrt{k_{\alpha\beta}}$ enthält. Dann ersetze man $P_{\alpha\beta}$ durch die Matrizen $\frac{1}{\sqrt{k_{\alpha\beta}}} P_{\alpha\beta}$, wo über das Vorzeichen der Wurzel so zu verfügen ist, daß auch die neuen Matrizen den Bedingungen (A) genügen. $\frac{1}{\sqrt{k_{\alpha\beta}}} P_{\alpha\beta}$ führt wegen (8) $J$ in sich über. Man darf daher wirklich von vornherein annehmen, daß alle $P_{\alpha\beta}$ orthogonal sind.

Genau entsprechendes gilt für den Fall, daß $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe der Komplexgruppe ist.

Es sei jetzt $\mathfrak{H}$ eine Gruppe vom Grade $f$, deren Charakter zu $\mathsf{K}$ gehört, und deren Faktorensystem als Exponenten $f$ besitzt (vgl. § 5, wo die Existenz derartiger Gruppen nachgewiesen wird). Es sei wie früher

$$\mathfrak{H}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} \mathfrak{H}_\beta,$$
$$P_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} P_{\alpha\gamma}.$$

Ist $\mathfrak{R}$ wieder eine ganze rationale Darstellung der linearen Gruppe in $f$ Variablen von der Ordnung $n$, und ist jeder Matrix vom Grade $f$ eine solche vom Grade $k$ zugeordnet, so folgt wie oben

$$Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} = c^n_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\gamma},$$

wo die Matrizen $Q_{\alpha\beta} = R(P_{\alpha\beta})$ den Bedingungen (A) genügen und den Grad $k$ besitzen. Nach U I Satz III kann es solche Matrizen nur geben, wenn der Index $m'$ von $c^n_{\alpha\beta\gamma}$ in $k$ aufgeht. Erst recht muß der Exponent von $c^n_{\alpha\beta\gamma}$ in $k$ aufgehen; dieser Exponent ist aber, wie man leicht sieht, $\frac{f}{(f, n)}$. Ist $\mathfrak{R}$ eine ganze rationale homogene Darstellung vom Grade $k$ und der Ordnung $n$ der allgemeinen linearen Gruppe in $f$ Variablen, so gilt

$$\frac{f}{(f, n)} \Big| k.$$

Man kann diesen Satz auch aus den bekannten Gradzahlen dieser Darstellungen $\mathfrak{R}$ herleiten.

## § 2.

Es soll jetzt der Hilfssatz aus § 1 bewiesen werden. Es sei also

$$\mathfrak{G}_\alpha Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\beta, \tag{5}$$

$$Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}, \tag{6}$$

wo die Matrizen $Q_{\alpha\beta}$ den Bedingungen (A) genügen. $\mathfrak{A}$, $w$, $\mu$, $a$ und $t$ mögen die in § 1 genannte Bedeutung haben.

$\mathfrak{K}$ sei eine irreduzible Gruppe, deren Charakter zu $\mathsf{K}$ gehört und die das Faktorensystem $C_{\alpha\beta\gamma}$ besitzt, sie existiert nach U I Satz IV. Ihr Schurscher Index in bezug auf $\mathsf{K}$ ist $w$.

Da es zu $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ nach Voraussetzung $t$ algebraisch konjugierte wesentlich verschiedene Gruppen gibt und $\mathfrak{A}$ den Index $\mu$ hat, so kann man, wie Herr I. Schur gezeigt hat[11]), $\mathfrak{A}$ in einem algebraischen Körper $\mathsf{K}'$ vom Grad $\mu \cdot t$ über $\mathsf{K}$ rational darstellen. Wir betrachten jetzt $\mathsf{K}'$ als Grundkörper; die Konjugierten zu $\vartheta$ in bezug auf $\mathsf{K}$ seien etwa $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{r'}$. Dann kann man $\mathfrak{G}$ in bezug auf $\mathsf{K}'$ das Faktorensystem $C_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r')$ beilegen; das ist auch das Faktorensystem von $\mathfrak{R}$ in bezug auf $\mathsf{K}'$. Bezeichnen $w', \mu', a', t'$ die bei Wahl von $\mathsf{K}'$ als Grundkörper an Stelle von $w, \mu, a, t$ tretenden Größen, so wird $\mu' = t' = 1$, $a' = a$. Für $\mathsf{K}'$ als Grundkörper lautet der Hilfssatz daher $w' \mid a$. Wir nehmen an, daß in diesem Fall die Behauptung bereits bewiesen sei. Nun ist $\mathfrak{R}$ in einem Körper vom Grade $w'$ über $\mathsf{K}'$ also vom Grad $w' \cdot \mu \cdot t$ über $\mathsf{K}$ rational darstellbar; also gilt $w \mid w' \cdot \mu \cdot t$ Daher folgt

$$w \mid a \cdot \mu \cdot t,$$

und das ist der Hilfssatz für den Fall des Grundkörpers $\mathsf{K}$. Es genügt daher, den Beweis für $\mathsf{K}'$ als Grundkörper zu führen. Für $\mathsf{K}'$ und $w'$ schreiben wir wieder $\mathsf{K}$ und $w$. Wir dürfen also annehmen, daß $\mathfrak{A}$ in $\mathsf{K}$ rational darstellbar sei.

Offenbar kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathfrak{G}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ komplett sei (UI S. 686). Dann kann man $\mathfrak{G}$ als System hyperkomplexer Zahlen in bezug auf $\mathsf{K}$ auffassen. $\mathfrak{G}$ sei jetzt nicht vollständig reduzibel, dann ist dies System nicht halbeinfach. Nach einem bekannten Satz kann man $\mathfrak{G}$ als Summe seines Radikals und eines halbeinfachen Systems $\mathfrak{G}^*$ auffassen. Als Gruppen aufgefaßt haben $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ dieselben irreduziblen Bestandteile[12]); offenbar kann man $\mathfrak{G}^*$ als Untergruppe von $\mathfrak{G}$ auch das Faktorensystem $C_{\alpha\beta\gamma}$ zulegen. Ist also der Satz für $\mathfrak{G}^*$ bewiesen, so gilt er auch für $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}^*$ ein halbeinfaches System darstellt, ist es vollständig reduzibel. Es genügt also, die Behauptung für vollständig reduzible Gruppen zu beweisen; wir nehmen daher $\mathfrak{G}$ im folgenden als vollständig reduzibel an.

Da $\mathfrak{G}$ nun $\mathfrak{A}$ genau $a$-mal als Bestandteil enthält, können wir $\mathfrak{G}$ — eventuell nach Übergang zu einer ähnlichen Gruppe — in der Form ansetzen

$$(9) \qquad \mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U} & 0 \\ 0 & \mathfrak{B} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{U} = E_a \times \mathfrak{A},$$

---

[11]) Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Transactions of the American Mathematical Society (2) **15**, S. 159–175.

[12]) Man vgl. R. Brauer, Über Systeme hyperkomplexer Zahlen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 79. Die behauptete Tatsache ergibt sich leicht aus § 1.

wo $\mathfrak{B}$ eine in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rationale Gruppe ist, die $\mathfrak{A}$ nicht als Bestandteil enthält. $Q_{\alpha\beta}$ werde in entsprechender Form zerlegt

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R_{\alpha\beta} & S_{\alpha\beta} \\ T_{\alpha\beta} & Z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r). \tag{10}$$

Dann folgt aus (5)

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}_\alpha & 0 \\ 0 & \mathfrak{V}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\alpha\beta} & S_{\alpha\beta} \\ T_{\alpha\beta} & Z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{\alpha\beta} & S_{\alpha\beta} \\ T_{\alpha\beta} & Z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_\beta & 0 \\ 0 & \mathfrak{V}_\beta \end{pmatrix} \tag{11}$$

und daher

$$\mathfrak{U}_\alpha S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} \mathfrak{V}_\beta. \tag{12}$$

Nun ist $\mathfrak{A}$ und wegen (9) also auch $\mathfrak{U}$ in $\mathsf{K}$ rational, daher gilt $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U} = E_a \times \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ nicht als Bestandteil in $\mathfrak{B}$ vorkommt, kommt es dann auch in $\mathfrak{V}_\beta$ nicht vor, folglich haben $\mathfrak{U}_\alpha$ und $\mathfrak{V}_\beta$ keinen irreduziblen Bestandteil gemeinsam, es folgt daher aus (12)

$$S_{\alpha\beta} = 0. \tag{13}$$

Aus (11) folgt ferner

$$\mathfrak{U}_\alpha R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} \mathfrak{U}_\beta; \tag{14}$$

aus (6), (10) und (13)

$$R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} R_{\alpha\gamma}. \tag{15}$$

Da $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}_\beta = E_a \times \mathfrak{A}$ ist, ist nach (14) $R_{\alpha\beta}$ mit $E_a \times \mathfrak{A}$ vertauschbar, wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{A}$ folgt in bekannter Weise, daß $R_{\alpha\beta}$ von der Form $T_{\alpha\beta} \times E_q$ ist, wo $q$ der Grad von $\mathfrak{A}$ ist. Die Matrizen $T_{\alpha\beta}$ haben den Grad $a$ und erfüllen auch die Bedingungen (A). Aus (15) ergibt sich

$$T_{\alpha\beta} T_{\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\gamma}.$$

Jetzt liefert UI Satz III, daß der Index $w$ von $C_{\alpha\beta\gamma}$ ein Teiler des Grades $a$ von $T_{\alpha\beta}$ sein muß. Das ist für den allein zu behandelnden Fall $\mu = t = 1$ der Inhalt des Hilfssatzes.

## § 3.

$\mathfrak{H}$ sei wieder eine irreduzible Gruppe linearer Substitutionen, deren Charakter zu $\mathsf{K}$ gehört. $\mathfrak{G}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$ ein irreduzibler Bestandteil von $\mathfrak{G}$ und zwar komme $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ genau $a$-mal vor. Der Index von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ heiße $\mu$; die zum Charakter $\varphi$ von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ konjugierten Charaktere seien $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$. Enthält der Charakter von $\mathfrak{G}$ $\varphi_\tau$ etwa $a_\tau$-mal, so ist

$$a = a_1 = a_2 = \ldots = a_t. \tag{16}$$

Haben $P_{\alpha\beta}$ und $c_{\alpha\beta\gamma}$ für $\mathfrak{H}$ dieselbe Bedeutung wie früher, so folgt aus (1)

$$\mathfrak{G}_\alpha P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}\mathfrak{G}_\beta, \tag{17}$$

da ja $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist. Aus (17) und (2) ergibt sich, daß man der Gruppe $\mathfrak{G}$ das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ beilegen kann. Ist $m$ der Index dieses Faktorensystems, so folgt aus dem Hilfssatz

$$m \mid \mu \cdot a \cdot t$$

oder wegen (16)

$$m \mid \mu \cdot \sum_{\tau=1}^{t} a_\tau. \tag{18}$$

Es sei jetzt $\mathsf{Z}$ ein beliebiger Zahlkörper, in bezug auf den der Gruppe $\mathfrak{H}$ ein endlicher Index zukomme[13]), $\mathsf{K}$ sei der durch Adjunktion des Charakters von $\mathfrak{H}$ zu $\mathsf{Z}$ entstehende Körper. Der Index von $\mathfrak{H}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ und $\mathsf{Z}$ ist derselbe[11]). Der Index von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathsf{Z}$ sei $\mu'$, dann gilt, da ja $\mathsf{K}$ den Körper $\mathsf{Z}$ enthält,

$$\mu \mid \mu'. \tag{19}$$

Die zu $\varphi$ in bezug auf $\mathsf{Z}$ konjugierten Charaktere seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, und zwar komme $\varphi_\sigma$ im Charakter von $\mathfrak{H}'$ genau $a_\sigma$-mal vor $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$. Diese $s$ Charaktere verteilen sich auf gewisse Klassen von solchen, die in bezug auf $\mathsf{K}$ algebraisch konjugiert sind. Für jede solche Klasse gilt (18), wenn dabei $\tau$ an Stelle der Werte $1, 2, \ldots, t$ die zu der betreffenden Klasse gehörigen Indizes durchläuft. Man ersetze in diesen Relationen $\mu$ durch $\mu'$; was wegen (19) erlaubt ist. Durch Addition für alle Klassen folgt

$$m \mid \mu'(a_1 + a_2 + \ldots + a_s).$$

Für $\mu'$ werde jetzt wieder $\mu$ geschrieben. Dann ist der Satz bewiesen:

Satz IV[14]). *$\mathfrak{H}$ sei eine irreduzible Gruppe linearer Substitutionen, der in bezug auf den gegebenen Körper $\mathsf{Z}$ ein endlicher Index $m$ zukommt. $\mathfrak{G}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$ ein irreduzibler Bestandteil von $\mathfrak{G}$, dessen Charakter mit $\varphi$ bezeichnet werde; $\mu$ sei der Index von $\varphi$ in bezug auf $\mathsf{Z}$. Die algebraisch zu $\varphi$ in bezug auf $\mathsf{Z}$ konjugierten Charaktere seien $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, und zwar möge $\varphi_\sigma$ im Charakter von $\mathfrak{G}$ genau $a_\sigma$-mal vorkommen $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$. Dann gilt*

$$m \mid \mu(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)$$

[13]) Die Bedingung dafür ist, daß durch Adjunktion des Charakters von $\mathfrak{H}$ zu $\mathsf{Z}$ ein algebraischer Körper endlichen Grades über $\mathsf{Z}$ entsteht.

[14]) Für den Fall einer Gruppe $\mathfrak{H}$ von endlicher Ordnung findet sich dieser Satz bereits bei Herrn I. Schur in S (Satz IX). In diesem Fall ist natürlich die Voraussetzung, daß $m$ endlich ist, überflüssig.

## § 4.

Satz V. *Besitzt eine irreduzible Gruppe* $\mathfrak{G}$ *in bezug auf den Körper* $\mathsf{K}$, *der ihren Charakter enthalte, den Index*

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

*so gibt es einen Körper* $\mathsf{K}(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(r)})$, *in dem sich* $\mathfrak{G}$ *rational darstellen läßt. Dabei ist* $\eta^{(\varrho)}$ *algebraisch vom Grade* $p_\varrho^{\alpha_\varrho}$ *in bezug auf* $\mathsf{K}$.[15])

Beweis. Das Faktorensystem von $\mathfrak{G}$ sei $c$. Die Gesamtheit aller Faktorensysteme in bezug auf den Körper $\mathsf{K}$ bildet eine Abelsche Gruppe. Der zu $c$ gehörige Exponent $l$ ist die Ordnung von $c$ in dieser Gruppe; nach B Satz I ist $l$ durch $p_1, p_2, \dots, p_r$ und durch keine anderen Primzahlen teilbar. Man kann dann $c$ in der Form schreiben

$$c = c_1 c_2 \dots c_r, \tag{20}$$

wo das Faktorensystem $c_\varrho$ als Ordnung eine Potenz von $p_\varrho$ hat ($\varrho = 1, 2, \dots, r$). $c_\varrho$ ist eine Potenz $c^{\lambda_\varrho}$ von $c$, daher ist sein Index $m_\varrho$ ein Teiler von $m$; denn in einem Körper, in dem $\mathfrak{G}$ rational darstellbar ist, ist auch $\mathfrak{G}^{\lambda_\varrho}$ darstellbar. Da in $m_\varrho$ keine von $p_\varrho$ verschiedene Primzahl aufgehen kann, folgt $m_\varrho \mid p_\varrho^{\alpha_\varrho}$. Es sei $\mathsf{K}(\eta^{(\varrho)})$ ein algebraischer Körper vom Grade $m_\varrho$ über $\mathsf{K}$, in dem $\mathfrak{G}^{\lambda_\varrho}$ rational darstellbar ist. Dann sind in $\mathsf{K}(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(r)})$ alle Gruppen mit den Faktorensystemen $c_1, c_2, \dots, c_r$ darstellbar; wegen (20) ist auch $\mathfrak{G}$ mit dem Faktorensystem $c$ in diesem Körper darstellbar. Daher hat dieser Körper einen durch $m$ teilbaren Grad, folglich muß $\eta^{(\varrho)}$ genau den Grad $p_\varrho^{\alpha_\varrho}$ besitzen.

## § 5.

Ist $\mathfrak{H}$ eine irreduzible Gruppe des Grades $f$, deren Charakter zum Grundkörper gehört; ist $l$ der Exponent des Faktorensystems von $\mathfrak{H}$ und ist $m$ der Index von $\mathfrak{H}$ in bezug auf $\mathsf{K}$, so gilt

$$l \mid m, \qquad m \mid f.$$

Es soll jetzt für beliebig gegebene, positive ganze rationale Zahlen $f$ gezeigt werden, daß es endliche Gruppen gibt, für die $l = f$ und daher auch $m = f$ ist[16]).

$p$ sei eine Primzahl, für die $q = \frac{p-1}{f}$ ganz und zu $f$ teilerfremd ist,

---

[15]) Man vgl. zu diesem Satz und seinem Beweis den Satz 10 der in Anm. [12]) zitierten Arbeit.

[16]) Notwendige Bedingungen dafür, daß bei einer endlichen Gruppe der Fall $m = f$ eintritt, finden sich in S.

z. B. sei $p$ eine der unendlich vielen Primzahlen der arithmetischen Progression $f^2x+f+1$, $x=0,1,2,\ldots$. $j$ sei eine ganze rationale Zahl, die $(\mathrm{mod}\ p)$ zum Exponenten $f$ gehört; wir bestimmen eine ganze rationale Zahl $k$ aus den Kongruenzen

$$k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ f), \qquad k\equiv j\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Dann gehört $k$ auch $(\mathrm{mod}\ pf)$ zum Exponenten $f$.

(21) $k^f\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ pf)$; $k^\lambda\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$ für $\lambda=1,2,\ldots,f-1$; $k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ f)$.

$\varrho$ sei eine primitive $(p\cdot f)$-te Einheitswurzel. Wir bilden die Matrizen vom Grade $f$

(22) $$A=\begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \varrho^k & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \varrho^{k^2} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varrho^{k^{f-1}} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \varrho^p\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

(23) $$A^{pf}=E; \quad B^f=\varrho^p\cdot E; \quad B^{f^2}=E; \quad B^{-1}AB=A^k.$$

$A$ und $B$ erzeugen eine irreduzible Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Grade $f$ und der Ordnung $p\cdot f^2$. $\mathsf{K}$ sei der Teilkörper des Körpers der $(pf)$-ten Einheitswurzeln, der zu der durch die Substitutionen

$$\varrho\,\|\,\varrho,\ \varrho\,\|\,\varrho^k,\ \varrho\,\|\,\varrho^{k^2},\ \ldots,\ \varrho\,\|\,\varrho^{k^{f-1}}$$

gebildeten Untergruppe der Galoisschen Gruppe gehört. Wegen (21) ist $\varrho^{pk}=\varrho^p$; daher gehört $\varrho^p$ zu $\mathsf{K}$. Man schließt dann leicht, daß $\mathsf{K}$ den Charakter von $\mathfrak{H}$ enthält. Wir setzen

$$\vartheta=\vartheta_1=\varrho,\ \vartheta_2=\varrho^k,\ \ldots,\ \vartheta_f=\varrho^{k^{f-1}}.$$

Dann ist $\mathfrak{H}$ im Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ vom Grad $f$ über $\mathsf{K}$ rational, die Galoissche Gruppe dieses Körpers in bezug auf $\mathsf{K}$ ist zyklisch. Die konjugierten Gruppen zu $\mathfrak{H}$ seien analog wie früher $\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2,\ldots,\mathfrak{H}_f$; $\mathfrak{H}_\varrho$ geht aus $\mathfrak{H}$ hervor, wenn man $A$ durch $A^{k^{\varrho-1}}$ ersetzt und $B$ ungeändert läßt. Aus (23) folgt daher für beliebiges ganzzahliges $\nu$

(24) $$\mathfrak{H}_\alpha B^{\beta-\alpha+\nu f}=B^{\beta-\alpha+\nu f}\mathfrak{H}_\beta.$$

Wir setzen

(25) $P_{\alpha\beta}=B^{\beta-\alpha}$ für $\beta\geqq\alpha$; $P_{\alpha\beta}=B^{\beta-\alpha+f}$ für $\beta<\alpha$; $\alpha,\beta=1,2,\ldots,f$.

Wegen (24) sind dann die Bedingungen (1) erfüllt; wie man leicht sieht, erfüllen die Matrizen $P_{\alpha\beta}$ die Bedingungen (A). Ferner ergibt sich aus (25) und (23), wenn $c_{\alpha\beta\gamma}$ das zugehörige Faktorensystem bezeichnet,

$$(26)\quad c_{112}=1,\ c_{123}=1,\ c_{134}=1,\ c_{145}=1,\ \ldots,\ c_{1,f-1,f}=1,\ c_{1,f,1}=\varrho^p.$$

Wenn nun das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ den Exponenten $l$ hat, gibt es Zahlen $k_{\alpha\beta}$, die den Bedingungen (A) genügen und für die

$$(27)\qquad c_{\alpha\beta\gamma}^{l}=\frac{k_{\alpha\beta}\cdot k_{\beta\gamma}}{k_{\alpha\gamma}}$$

gilt. Wegen (26) und (27) folgt

$$\frac{k_{11}\cdot k_{12}}{k_{12}}\cdot\frac{k_{12}\cdot k_{23}}{k_{13}}\cdot\frac{k_{13}\cdot k_{34}}{k_{14}}\cdot\frac{k_{14}\cdot k_{15}}{k_{15}}\cdot\ldots\cdot\frac{k_{1f-1}\cdot k_{f-1f}}{k_{1f}}\cdot\frac{k_{1f}\cdot k_{f1}}{k_{11}}=\varrho^p,$$

$$(28)\qquad k_{12}\,k_{23}\ldots k_{f-1,f}k_{f1}=\varrho^p.$$

Es sei nun $k_{12}=\frac{1}{a}g(\varrho)$, wo $g$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und $a$ eine ganze rationale Zahl ist. Da $k_{23}, k_{34}, \ldots, k_{f1}$ die Konjugierten zu $k_{12}$ sind, folgt aus (28)

$$(29)\qquad g(\varrho)\,g(\varrho^k)\,g(\varrho_k{}^2)\ldots g(\varrho^{kf-1})=a^f\cdot\varrho^{p\cdot l}.$$

Nach den Sätzen über die Zerlegung einer rationalen Primzahl in Primideale eines Kreiskörpers[17]) gilt für den Körper der $(pf)$-ten Einheitswurzeln wegen (21)

$$(30)\qquad p=\mathfrak{p}_1^{p-1}\cdot\mathfrak{p}_2^{p-1}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_{\varphi(f)}^{p-1},$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{\varphi(f)}$ untereinander verschiedene Primideale ersten Grades sind. Da ferner im Körper $\mathsf{P}(\varrho^p)$ der $f$-ten Einheitswurzeln $p$ das Produkt von $\varphi(f)$ verschiedenen Primidealen ist, sind $\mathfrak{p}_1^{p-1}, \mathfrak{p}_2^{p-1}, \ldots, \mathfrak{p}_{\varphi(f)}^{p-1}$ schon Ideale dieses Körpers und gehen daher beim Ersetzen von $\varrho$ durch $\varrho^k$ in sich über, ebenso gehen dann auch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{\varphi(f)}$ in sich über. Daher enthalten in (29) alle Faktoren links jedes feste Ideal $\mathfrak{p}_\sigma$ in derselben Potenz. Ist nun $a$ etwa genau durch $p^n$ teilbar, so geht $\mathfrak{p}_\sigma$ in der linken Seite von (29) genau $fn(p-1)$-mal auf, in jedem Faktor also $n(p-1)$-mal, und wegen (30) ist jeder Faktor durch $p^n$ teilbar. Denkt man sich links und rechts in (29) $p^{nf}$ gehoben[18]), so sieht man, daß man ohne Einschränkung $(a, p)=1$ annehmen kann.

[17]) Siehe etwa Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **4** (1897), Kap. 22.

[18]) Offenbar kann man dann die linke Seite von (29) in der Form

$$g_1(\varrho)\,g_1(\varrho^k)\ldots g_1(\varrho^{kf-1})$$

annehmen, wo auch $g_1$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten ist.

Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges der Ideale $\mathfrak{p}_\sigma$, so geht $\mathfrak{p}$ in $\varrho^f - 1$ auf, da $\varrho^f$ eine primitive $p$-te Einheitswurzel ist und das Hauptideal $((\varrho^f-1)^p)$ bekanntlich mit $(p)$ übereinstimmt. Also gilt $\varrho^f \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$, und da nach (21) $f$ in $k-1$ aufgeht, $\varrho^{k-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$, also

$$\varrho^k \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{31}$$

Aus (31) folgt allgemein

$$\begin{aligned} &\varrho \equiv \varrho^k \equiv \varrho^{k^2} \equiv \ldots \equiv \varrho^{k^{f-1}} \pmod{\mathfrak{p}}, \\ &g(\varrho) \equiv g(\varrho^k) \equiv \ldots \equiv g(\varrho^{k^{f-1}}) \pmod{\mathfrak{p}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Aus (32) und (29) ergibt sich

$$g(\varrho)^f \equiv a^f \cdot \varrho^{p \cdot l} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Es sei nun $p-1 = qf$, dann folgt durch Erheben in die $q$-te Potenz

$$g(\varrho)^{p-1} \equiv a^{p-1} \varrho^{pql} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Da nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades ist, ist nach der Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes $g(\varrho)^{p-1} \equiv a^{p-1} \equiv 1$, also

$$\varrho^{p \cdot q \cdot l} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{33}$$

$\varrho^{p \cdot q \cdot l}$ ist eine $f$-te Einheitswurzel; ist sie von 1 verschieden, so ist $\varrho^{p \cdot q \cdot l} - 1$ eine Einheit oder jedenfalls ein Teiler von $f$, also zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd, im Widerspruch zu (33). Daher gilt $\varrho^{pql} = 1$, d. h. $f \mid ql$. Nun ist nach Voraussetzung $f$ zu $q = \frac{p-1}{f}$ teilerfremd, folglich $f \mid l$.

Da andererseits $l$ nicht größer als der Grad $f$ von $\mathfrak{H}$ sein kann, folgt $f = l$, wie behauptet war. Im Fall $p = 7$, $f = 3$ ist die Gruppe schon bei Herrn Schur[19]) behandelt worden; dort wird aber die Bestimmung des Index nur auf Behandlung von (29) zurückgeführt.

Jetzt soll an einem Beispiel gezeigt werden, daß für Gruppen der Index und der Exponent des Faktorensystems nicht übereinzustimmen brauchen.

$\mathsf{K}$ sei der Körper, der aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion von zwei algebraisch unabhängigen Transzendenten $u$ und $v$ entsteht. $a$ und $b$ seien Zahlen aus $\mathsf{K}$, für die $\mathsf{K}$, $\mathsf{K}(\sqrt{a})$ und $\mathsf{K}(\sqrt{b})$ alle drei verschieden sind (z. B. $a = 2$, $b = 3$). Es sei $\vartheta = \vartheta_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\vartheta_2 = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\vartheta_3 = -\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\vartheta_4 = -\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

---

[19]) B, S. 179. — Auch Burnside hat in seiner Arbeit: On the arithmetical nature of the coefficients in a group of linear substitutions of finite order, Proceedings of the London Mathematical Society (2), **4** (1905), S. 1–9, auf ähnliche Gruppen hingewiesen, ohne zu beweisen, daß sie nicht im Körper des Charakters rational darstellbar sind.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien die Gruppen, die aus allen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} x_1 + x_2\sqrt{a}, & v(y_1 + y_2\sqrt{a}) \\ y_1 - y_2\sqrt{a}, & x_1 - x_2\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} z_1 + z_2\sqrt{b}, & u(t_1 + t_2\sqrt{b}) \\ t_1 - t_2\sqrt{b}, & z_1 - z_2\sqrt{b} \end{pmatrix}$$

bestehen; dabei sind $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2$ beliebige Größen aus $\mathsf{K}$. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind beide irreduzibel, ihr Charakter gehört zu $\mathsf{K}$. Man kann $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als Systeme $\mathsf{A}$ und $\mathsf{B}$ von verallgemeinerten Quaternionen über dem Grundkörper $\mathsf{K}$ auffassen. Man bilde $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$ sei die zu $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ gehörige in bezug auf $\mathsf{K}$ komplette Gruppe; sie ist eine Darstellung des Systems $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$. $\mathfrak{G}$ besteht aus allen Matrizen

$$G = \begin{pmatrix} \xi_1 & u\eta_1 & v\zeta_1 & uv\omega_1 \\ \eta_2 & \xi_2 & v\omega_2 & v\zeta_2 \\ \zeta_3 & u\omega_3 & \xi_3 & u\eta_3 \\ \omega_4 & \zeta_4 & \eta_4 & \xi_4 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Dabei sind $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \omega_1$ Zahlen aus $\mathsf{K}(\vartheta)$, ihre Konjugierten in bezug auf $\mathsf{K}$ sind durch angehängte Indizes bezeichnet.

Das Faktorensystem von $\mathfrak{A}$ sei $c'$, das von $\mathfrak{B}$ sei $c''$. Dann besitzt $\mathfrak{G}$ das Faktorensystem $c = c' \cdot c''$ (vgl. UI § 3). Da nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ den Index 1 oder 2 besitzen, sind $c'^2$ und $c''^2$ beide dem Einheitsfaktorensystem assoziiert. Das gleiche gilt dann für $c^2 = c'^2 \cdot c''^2$, so daß der Exponent $l$ des Faktorensystems von $\mathfrak{G}$ den Wert 1 oder 2 hat.

Jetzt soll gezeigt werden, daß der Index $m$ von $\mathfrak{G}$ in bezug auf $\mathsf{K}$ den Wert 4 besitzt. Da aus $l = 1$ nach B Satz I $m = 1$ folgen würde, ergibt sich übrigens dann $l = 2$.

Um nun die Behauptung zu beweisen, genügt es nachzuweisen, daß für $G \neq 0$ auch die Determinante $|G|$ von Null verschieden ist[20]). Es sei also $|G| = 0$ für $G \neq 0$. $\xi_1$ ist von der Form

$$\xi_1 = X_1 + X_2\sqrt{a} + X_3\sqrt{b} + X_4\sqrt{a}\sqrt{b},$$

wo $X_1, X_2, X_3, X_4$ Größen aus $\mathsf{K}$, d. h. rationale Funktionen von $u$ und $v$ mit rationalen Koeffizienten sind. Multipliziert man $\xi, \eta, \zeta, \omega$ mit dem Hauptnenner von $X_1, X_2, X_3, X_4$, so erkennt man, daß man diese Funktionen ohne Einschränkung ganz und rational annehmen darf. $\xi_2, \xi_3, \xi_4$ entstehen aus $\xi_1$, wenn man $\sqrt{b}$ durch $-\sqrt{b}$, bzw. $\sqrt{a}$ durch $-\sqrt{a}$, bzw. $\sqrt{a}$ durch $-\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ durch $-\sqrt{b}$ ersetzt. In entsprechender Form kann man die Größen $\eta_\nu, \xi_\nu, \omega_\nu$ ansetzen. Offenbar darf man ferner annehmen, daß $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \omega_1$ als Funktionen von $u$ und $v$ nicht alle durch $u$ teilbar sind.

[20]) Denn dann besitzt $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ offenbar keine Nullteiler. Wie a. a. O. [12]) gezeigt ist, stimmt dann der Index $m$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Grad überein, also ist $m = 4$.

Da $u$ und $v$ algebraisch unabhängige Transzendente sind, muß die Gleichung $|G| = 0$ auch gelten, wenn man $u$ und $v$ als unabhängige Variable betrachtet. Man setze $v = 0$. Dann folgt aus (34)

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & u\eta_1 \\ \eta_2 & \xi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_3 & u\eta_3 \\ \eta_4 & \xi_4 \end{vmatrix} = 0\ ^{21}),$$

und daher ergibt sich

$$(35) \qquad \xi_1\xi_2 - u\eta_1\eta_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \xi_3\xi_4 - u\eta_3\eta_4 = 0.$$

Infolgedessen ist mindestens ein $\xi_\nu$ für $v = 0$ durch $u$ teilbar, folglich gilt das gleiche für alle $\xi_\nu$. Wegen (35) ist dann mindestens ein $\eta_\nu$ und folglich alle $\eta_\nu$ durch $u$ teilbar. Daraus folgt, daß alle $\xi_\nu$ durch $u^2$ teilbar sind usw. Es ergibt sich, daß für $v = 0$ sowohl $\xi_1$ wie $\eta_1$ durch beliebig hohe Potenzen von $u$ teilbar sein müssen, also verschwinden beide für $v = 0$.

Daher sind $\xi_\nu$ und $\eta_\nu$ durch $v$ teilbar. Ganz analog folgt, daß $\xi_\nu$ und $\zeta_\nu$ durch $u$ teilbar sind. Es sei

$$\xi_\nu = uv\xi_\nu^*, \qquad \eta_\nu = v\eta_\nu^*, \qquad \zeta_\nu = u\zeta_\nu^*, \qquad \omega_\nu = \omega_\nu^*.$$

Setzt man dies in (34) ein und hebt in $|G|$ in der ersten Zeile $uv$, in der zweiten Zeile $v$, in der dritten Zeile $u$ fort, so folgt

$$\begin{vmatrix} \xi_1^* & \eta_1^* & \zeta_1^* & \omega_1^* \\ \eta_2^* & u\xi_2^* & \omega_2^* & u\zeta_2^* \\ \zeta_3^* & \omega_3^* & v\xi_3^* & v\eta_3^* \\ \omega_4^* & u\zeta_4^* & v\eta_4^* & uv\xi_4^* \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt ganz analog, daß $\zeta_\nu^*$ und $\omega_\nu^*$ durch $v$, $\eta_\nu^*$ und $\omega_\nu^*$ durch $u$ teilbar sind. Daher sind alle Funktionen $\xi_\nu$, $\eta_\nu$, $\zeta_\nu$, $\omega_\nu$ durch $uv$ teilbar. Das steht mit den oben gemachten Annahmen in Widerspruch. Also ist für die Gruppe $\mathfrak{G}$ wirklich $l = 2$, $m = 4$.

Es gibt also nullteilerfreie Systeme hyperkomplexer Zahlen, die sich als direktes Produkt von zwei Systemen mit vier Basiselementen darstellen. Für Systeme, für die $l = m = 4$ ist (vgl. oben), ist offenbar eine derartige Darstellung nicht möglich.

---

[21]) Dabei ist in $\xi_1, \xi_2, \ldots$ überall $v$ durch 0 zu ersetzen.

(Eingegangen am 3. Juni 1929.)

# Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme.

Von

Oskar Perron in München.

## Einleitung.

In dieser Arbeit werden Differentialgleichungssysteme der Form

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

betrachtet, wo $t$ das einseitig unendliche Intervall $t \geqq 0$ (oder auch $t \geqq t_0$, was natürlich keinen Unterschied macht) durchläuft, während die Koeffizienten $f_{\nu\mu}(t)$ und die Integrale $x_\nu = x_\nu(t)$ beliebige komplexe Werte haben dürfen; die $f_{\nu\mu}(t)$ seien außerdem stetig und beschränkt. Die Existenz und Einzigkeit eines Integrals $x_\nu(t)$ mit willkürlich vorgegebenen Anfangswerten $x_\nu(0)$ ist dann, wie bekannt, für alle $t > 0$ gesichert. Doch soll in der ganzen Arbeit, wenn wir von einem Integral reden, das triviale $x_\nu(t) = 0$ stets ausgeschlossen sein.

Für die Größenordnung eines Integrals bei unbegrenzt wachsendem $t$ gibt der obere Limes

$$\gamma = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \tag{2}$$

einen gewissen Maßstab. Offenbar ist auch

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n} |x_\nu| = \gamma, \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 = 2\gamma, \tag{4}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 = 2\gamma. \tag{5}$$

Sind die Koeffizienten konstant: $f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$, so ergibt sich aus der bekannten Form der Integrale sofort, daß $\gamma$ immer gleich dem reellen Teil

einer Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

ist, also nur $n$ Werte annehmen kann. Dasselbe gilt in dem allgemeineren Fall, daß die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$ existieren; die charakteristische Gleichung ist dabei dieselbe wie oben[1]). Wenn die $f_{\nu\mu}(t)$ periodische Funktionen von $t$ sind mit gemeinsamer Periode, so folgt aus der bekannten Form der Integrale[2]), daß $\gamma$ gleich dem reellen Teil eines sogenannten charakteristischen Exponenten ist, also ebenfalls nur $n$ Werte annehmen kann; allerdings hat man noch keine brauchbare Methode zur wirklichen Berechnung.

Angesichts dieser sehr speziellen Resultate wird es überraschen, *daß sie eigentlich gar nichts mit der speziellen Form der Koeffizienten zu tun haben, daß vielmehr auch im allgemeinsten Fall für $\gamma$ nie mehr als $n$ Werte möglich sind, und wenn man ihnen passende Multiplizitäten beilegt, sind es genau $n$.* Wir nennen sie die Ordnungszahlen des Differentialgleichungssystems und wollen hier einige ihrer Eigenschaften entwickeln. Die wirkliche Berechnung ist freilich eine schwierige Aufgabe und wird zunächst nur in sehr speziellen Fällen gelingen.

## § 1.

## Definition der Ordnungszahlen.

Da die Koeffizienten $f_{\nu\mu}(t)$ beschränkt sein sollen, sei etwa $|f_{\nu\mu}(t)| \leqq c$. Multipliziert man die Gleichung (1) mit der zu $x_\nu$ konjugiert-komplexen Größe $\bar{x}_\nu$, so erhält man, wenn man beiderseits den reellen Teil nimmt[3]),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_\nu|^2 = \Re\left(\bar{x}_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right) = \Re\left(\bar{x}_\nu \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu\right)$$

$$\leqq |x_\nu| \sum_{\mu=1}^{n} c\,|x_\mu| \leqq c \sum_{\mu=1}^{n} \frac{|x_\nu|^2+|x_\mu|^2}{2},$$

und analog auch

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_\nu|^2 \geqq -|x_\nu| \sum_{\mu=1}^{n} c\,|x_\mu| \geqq -c \sum_{\mu=1}^{n} \frac{|x_\nu|^2+|x_\mu|^2}{2}.$$

---

[1]) Vgl. Satz 13 meiner Arbeit: Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 129–160.

[2]) Man sehe etwa: J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig 1905, IX. Abschnitt. — H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, vol. I, Paris 1892, p. 64–68.

[3]) $\Re(\alpha)$ bedeutet stets den reellen Teil von $\alpha$.

Durch Summation nach $\nu$ ergibt sich hieraus, wenn zur Abkürzung $\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 = \varphi(t)$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) \begin{cases} \leqq & nc\varphi(t) \\ \geqq & -nc\varphi(t), \end{cases}$$

oder, was dasselbe sagt,

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\, e^{-2nct}) \leqq 0, \qquad \frac{d}{dt}(\varphi(t)\, e^{2nct}) \geqq 0.$$

Daher nehmen die Funktionen $\varphi(t)\, e^{-2nct}$ bzw. $\varphi(t)\, e^{2nct}$ monoton ab bzw. zu, und folglich ist

$$\varphi(t)\, e^{-2nct} \leqq \varphi(0), \qquad \varphi(t)\, e^{2nct} \geqq \varphi(0).$$

Hieraus erkennt man sofort, daß

$$(6). \qquad -2nc \leqq \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\varphi(t) \leqq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\varphi(t) \leqq 2nc$$

ist, und also insbesondere mit der Bezeichnung der Einleitung (vgl. Formel (5))

$$2\gamma = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\varphi(t) \begin{cases} \leqq & 2nc, \\ \geqq & -2nc. \end{cases}$$

Somit ist $\gamma$ für jedes Integral eine endliche Zahl. Wir behaupten, daß für $\gamma$ höchstens $n$ verschiedene Werte möglich sind. Zum Beweis nehmen wir im Gegenteil an, es seien mehr als $n$ verschiedene Werte möglich, und greifen aus diesen $n+1$ verschiedene heraus, die wir der Größe nach ordnen:

$$(7) \qquad \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{n+1}.$$

Sei etwa $x_\nu = x_{\nu\lambda}$ ein Integral, für welches $\gamma = \gamma_\lambda$, also

$$(8) \qquad \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n} |x_{\nu\lambda}| = \gamma_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n+1)$$

ist. Zwischen den $n+1$ Integralen $x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots, x_{\nu, n+1}$ muß dann eine lineare Abhängigkeit

$$C_1 x_{\nu 1} + C_2 x_{\nu 2} + \ldots + C_{n+1} x_{\nu, n+1} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Sei $C_{p+1}$ das letzte von 0 verschiedene $C_\lambda$, wobei natürlich $p+1 > 1$ ist; dann dürfen wir $C_{p+1} = -1$ annehmen und erhalten

$$(9) \qquad x_{\nu, p+1} = \sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda x_{\nu\lambda} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun folgt, wenn $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, aus (8) und (7) für $\lambda \leqq p$

$$\operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n} |x_{\nu\lambda}| < e^{(\gamma_\lambda+\varepsilon)t} \leqq e^{(\gamma_p+\varepsilon)t} \quad \text{für alle hinreichend großen } t.$$

Mit Rücksicht hierauf schließt man aus (9)

$$\max_{\nu=1}^{n} |x_{\nu,p+1}| \leqq \sum_{\lambda=1}^{p} |C_\lambda| e^{(\gamma_p+\varepsilon)t} \quad \text{für alle hinreichend großen } t,$$

und daher

$$\gamma_{p+1} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \max_{\nu=1}^{n} |x_{\nu,p+1}| \leqq \gamma_p + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon$ beliebig klein sein darf, folgt hieraus $\gamma_{p+1} \leqq \gamma_p$. Wegen dieses Widerspruchs mit (7) war die obige Annahme falsch und unsere Behauptung ist bewiesen.

Nunmehr seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ die voneinander verschiedenen möglichen Werte für $\gamma$; wir nennen sie die *Ordnungszahlen des Differentialgleichungssystems* und ordnen sie der Größe nach:

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_m.$$

Nach dem Bewiesenen ist $m \leqq n$. Von einem Integral $x_\nu$, für welches

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| = \gamma_\lambda$$

ist, sagen wir, *es gehöre zur Ordnungszahl* $\gamma_\lambda$, oder auch, $\gamma_\lambda$ *sei die Ordnungszahl des Integrals.*

Wenn man aus endlich vielen Integralen, deren Ordnungszahlen $\leqq \gamma_\lambda$ sind, ein anderes linear zusammensetzt, so ist dessen Ordnungszahl offenbar wieder $\leqq \gamma_\lambda$ (Beweis genau wie oben im Anschluß an Formel (9)). Hiernach sind die folgenden Begriffsbildungen sinnvoll.

Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale derart, daß für sie und ihre linearen Zusammensetzungen die Ordnungszahl möglichst klein, also gleich $\gamma_1$ ist, sei $e_1$; dann schreiben wir der Ordnungszahl $\gamma_1$ die Vielfachheit $e_1$ zu. Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale derart, daß für sie und ihre linearen Zusammensetzungen die Ordnungszahl gleich $\gamma_1$ oder $\gamma_2$ ist, ist augenscheinlich größer, etwa $e_1 + e_2$; dann schreiben wir der Ordnungszahl $\gamma_2$ die Vielfachheit $e_2$ zu. Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale derart, daß für sie und ihre linearen Zusammensetzungen die Ordnungszahl gleich $\gamma_1$ oder $\gamma_2$ oder $\gamma_3$ ist, muß wieder größer sein, etwa $e_1 + e_2 + e_3$; dann schreiben wir der Ordnungszahl $\gamma_3$ die Vielfachheit $e_3$ zu. So fortfahrend erhalten wir zu jeder Ordnungszahl $\gamma_\lambda$ eine Vielfachheit $e_\lambda$, und offenbar ist $e_1 + e_2 + \ldots + e_m = n$; also gilt der

Satz 1. *Die Anzahl der Ordnungszahlen des linearen Differentialgleichungssystems* (1) *ist, wenn jede ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt wird, genau gleich* $n$.

Wir werden dementsprechend immer von den $n$ Ordnungszahlen reden, die dann teilweise oder auch alle einander gleich sein können. Die so verstandenen Ordnungszahlen ändern sich nicht, wenn man auf das Differentialgleichungssystem eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\nu\mu} y_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

(deren Determinante natürlich $\neq 0$ sein muß) ausübt; denn es ist ja augenscheinlich

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu| .$$

Wenn für die Koeffizienten die Beziehungen

$$\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$$

statthaben, so sind die $n$ Ordnungszahlen einfach die reellen Teile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0 ,$$

und zwar jede mit der richtigen Vielfachheit. Das ist lediglich eine andere Fassung des in der Fußnote [1]), S. 749 zitierten Satzes.

Für die Summe der Ordnungszahlen gibt folgender Satz eine nützliche Abschätzung:

Satz 2. *Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ die Ordnungszahlen des Differentialgleichungssystems* (1), *so gilt für ihre Summe folgende Abschätzung nach unten:*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \geqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{n} \Re\,(f_{\lambda\lambda}(\tau))\, d\tau .$$

Beweis. Nach der Definition der Ordnungszahlen kann man $n$ linear unabhängige Integrale $x_\nu = x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots, x_{\nu n}$ angeben derart, daß das Integral $x_{\nu\lambda}$ zur Ordnungszahl $\gamma_\lambda$ gehört. Dann ist, unter $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, für genügend große $t$

$$|x_{\nu\lambda}| < e^{\left(\gamma_\lambda + \frac{\varepsilon}{n}\right) t} .$$

Daher auch, wenn

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} = v$$

gesetzt wird,

$$|v| < n!\, e^{\left(\sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_\lambda + \varepsilon\right) t},$$

und also

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log |v| \leqq \sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_\lambda. \tag{10}$$

Anderseits ist bekanntlich

$$v = a\, e^{\int_0^t \sum_{\lambda=1}^{n} f_{\lambda\lambda}(\tau)\, d\tau}, \tag{11}$$

wo $a$ eine Konstante, und folglich

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log |v| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{n} \Re\,(f_{\lambda\lambda}(\tau))\, d\tau. \tag{12}$$

Durch Vergleich der Formeln (10) und (12) ergibt sich Satz 2 unmittelbar.

## § 2.

## Abweichendes Verhalten des unteren Limes.

Sind die Koeffizienten $f_{\nu\mu}(t)$ Konstanten, so kann das in die Definition der Ordnungszahlen eingehende Zeichen „$\overline{\lim}$“ (Formeln (2), (3), (4), (5)) ersetzt werden durch „$\lim$“. Denn aus der bekannten Form der Integrale ersieht man dann leicht, daß der Grenzwert existiert. Dasselbe gilt, wie Herr Lettenmeyer gezeigt hat[4]), auch in dem allgemeineren Fall, daß die Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ für $t \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte streben. Jedoch wäre es ein Irrtum, deshalb zu glauben, daß das in jedem Fall so sein müsse. Zwar lehrt die Formel (6), daß auch der dortige untere Limes stets endlich ist. Er braucht aber nicht mit dem oberen Limes übereinzustimmen und die Anzahl der möglichen Werte für den unteren Limes kann auch größer als $n$ sein. Als Beispiel dafür betrachten wir das System

$$\frac{dx_1}{dt} = 2\,(\sin\log t + \cos\log t)\, x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\,(\sin\log t + \cos\log t)\, x_2$$

mit dem allgemeinen Integral

$$x_1 = C_1\, e^{2t\sin\log t}, \qquad x_2 = C_2\, e^{-t\sin\log t}.$$

---

[4]) F. Lettenmeyer, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen, Sitzungsberichte der bayr. Akademie der Wissenschaften, math.-naturw. Abteilung, 1929, S. 201—252.

Zur Bestimmung der Ordnungszahlen brauchen wir den oberen Limes

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\log\left(|C_1|\,e^{2t\sin\log t}+|C_2|\,e^{-t\sin\log t}\right).$$

Man sieht sofort, für $C_2=0$ ist er gleich 2, für $C_1=0$ ist er gleich 1; die Ordnungszahlen sind also 2 und 1. Der *untere* Limes

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\log\left(|C_1|\,e^{2t\sin\log t}+|C_2|\,e^{-t\sin\log t}\right)$$

dagegen nimmt drei verschiedene Werte an; man sieht unmittelbar, daß er für $C_2=0$ den Wert $-2$, für $C_1=0$ den Wert $-1$ hat; wenn aber $C_1$, $C_2$ beide von Null verschieden sind, ist er gleich 0.

## § 3.

## Das adjungierte System.

Wir betrachten jetzt die beiden Differentialgleichungssysteme

$$\frac{dx_\nu}{dt}=\sum_{\mu=1}^{n}f_{\nu\mu}(t)\,x_\mu \qquad (\nu=1,2,\ldots,n), \tag{13}$$

$$\frac{dy_\nu}{dt}=-\sum_{\mu=1}^{n}f_{\mu\nu}(t)\,y_\mu \qquad (\nu=1,2,\ldots,n), \tag{14}$$

die zueinander adjungiert sind. Für ihre Ordnungszahlen gilt der folgende

Satz 3. *Sind die Ordnungszahlen des Systems* (13) *nach abnehmender Größe geordnet*:

$$\gamma_1\geqq\gamma_2\geqq\cdots\geqq\gamma_n, \tag{$\Gamma$}$$

*und sind die Ordnungszahlen* $\delta_\nu$ *des adjungierten Systems* (14) *nach zunehmender Größe geordnet*:

$$\delta_1\leqq\delta_2\leqq\cdots\leqq\delta_n, \tag{$\Delta$}$$

*so ist stets* $\gamma_\nu+\delta_\nu\geqq 0$ *für* $\nu=1,2,\ldots,n$.

Zum Beweis sei

$$x_1=x_{1\lambda},\ x_2=x_{2\lambda},\ \ldots,\ x_n=x_{n\lambda}$$

für $\lambda=1,2,\ldots,n$ ein Fundamentalsystem von Integralen des Systems (13) derart, daß das Integral $x_\nu=x_{\nu\lambda}$ zur Ordnungszahl $\gamma_\lambda$ gehört. Wir bilden damit die Matrix

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1n}\\ \cdot&\cdots&\cdot\\ x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix}, \tag{15}$$

deren Determinante natürlich $\neq 0$ ist. Setzen wir außerdem

$$\begin{pmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix} = F(t) = F, \tag{16}$$

so folgt aus (13) die Matrixgleichung

$$\frac{dX}{dt} = FX. \tag{17}$$

Sodann sei

$$y_1 = y_{\lambda 1},\ y_2 = y_{\lambda 2},\ \ldots,\ y_n = y_{\lambda n}$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ ein Fundamentalsystem von Integralen des Systems (14) derart, daß das Integral $y_\nu = y_{\lambda\nu}$ zur Ordnungszahl $\delta_\lambda$ gehört. Wir bilden damit die Matrix

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

deren Determinante wieder $\neq 0$ ist, und aus (14) folgt dann

$$\frac{dY}{dt} = -YF. \tag{19}$$

Multipliziert man die Gleichung (17) linksseitig mit $Y$, die Gleichung (19) rechtsseitig mit $X$, so ergibt sich durch Addition

$$Y\frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt}X = 0,$$

und hieraus durch Integration

$$YX = C, \tag{20}$$

wo $C$ eine Matrix von Konstanten ist:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Da die Determinanten von $X, Y$ von Null verschieden sind, ist die Determinante von $C$ ebenfalls von Null verschieden. Ausführlich geschrieben besagt dann die Gleichung (20):

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_{\lambda\nu} x_{\nu\mu} = c_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Insbesondere ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_{\lambda\nu} x_{\nu\lambda} = c_{\lambda\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Nun gehört das Integral $x_{\nu\lambda}$ zur Ordnungszahl $\gamma_\lambda$ und $y_{\lambda\nu}$ gehört zur Ordnungszahl $\delta_\lambda$. Daher ist, wenn $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, für genügend große $t$

$$|x_{\nu\lambda}| \leqq e^{(\gamma_\lambda+\varepsilon)t}, \quad |y_{\lambda\nu}| \leqq e^{(\delta_\lambda+\varepsilon)t}.$$

Wegen (23) ist also

$$|c_{\lambda\lambda}| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\lambda\nu} x_{\nu\lambda}| \leqq n e^{(\gamma_\lambda+\delta_\lambda+2\varepsilon)t}.$$

Hieraus folgt, wenn die Konstante $c_{\lambda\lambda}$ von Null verschieden ist, sofort, daß $\gamma_\lambda + \delta_\lambda \geqq 0$ sein muß. Falls also alle $c_{\lambda\lambda}$ von Null verschieden sind, ist Satz 3 bewiesen. Nun kann man aber die Fundamentalsysteme $x_{\nu\lambda}$ und $y_{\lambda\nu}$ auf mannigfache Art so wählen, daß sie unseren bisherigen Forderungen genügen. Es kommt daher nur darauf an, sie so zu wählen, daß die durch (23) definierten Konstanten $c_{\lambda\lambda}$ alle $\neq 0$ werden. Wir wollen zeigen, daß das möglich ist.

Setzt man

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{pmatrix},$$

wobei die $a_{\nu\lambda}$ für $\nu > \lambda$ beliebige Konstanten sind, oder in abkürzender Schreibweise

$$XA = X^*,$$

so bilden die $x_{\nu\lambda}^*$ ebenfalls ein Fundamentalsystem von Integralen des Systems (13), und mit Rücksicht auf die Ungleichungen $(\Gamma)$ (vgl. Satz 3) gehört das Integral $x_\nu = x_{\nu\lambda}^*$ ebenfalls zur Ordnungszahl $\gamma_\lambda$. Wir dürfen daher an Stelle der Matrix $X$ auch die Matrix $X^*$ verwenden. Setzt man ferner

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}^* & \cdots & y_{1n}^* \\ y_{21}^* & \cdots & y_{2n}^* \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{n1}^* & \cdots & y_{nn}^* \end{pmatrix},$$

wobei auch die $b_{\lambda\nu}$ für $\lambda > \nu$ beliebige Konstanten sind, oder abkürzend

$$BY = Y^*,$$

so bilden die $y_{\lambda\nu}^*$ ebenfalls ein Fundamentalsystem von Integralen des Systems (14), und mit Rücksicht auf die Ungleichungen $(\Delta)$ (vgl. Satz 3) gehört das Integral $y_\nu = y_{\lambda\nu}^*$ ebenfalls zur Ordnungszahl $\delta_\lambda$. Wir dürfen daher an Stelle der Matrix $Y$ auch die Matrix $Y^*$ verwenden.

Wenn wir jetzt an Stelle der Matrizes $X, Y$ erlaubterweise die Matrizes $X^* = XA$ und $Y^* = BY$ einführen, so entsteht aus (20)

$$Y^* X^* = BYXA = BCA = C^*$$

oder, wenn der letzte Teil dieser Gleichungskette ausführlicher geschrieben wird,

$$(24)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^* & \dots & c_{1n}^* \\ c_{21}^* & \dots & c_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}^* & \dots & c_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Es kommt daher nur noch darauf an zu zeigen, daß man die $a_{\nu\mu}$, $b_{\nu\mu}$ so wählen kann, daß in (24) alle $c_{\lambda\lambda}^*$ von Null verschieden werden, was eine rein algebraische Aufgabe ist.

Zunächst ist nach (24)

$$c_{11}^* = c_{11} + \sum_{\mu=2}^{n} c_{1\mu} a_{\mu 1}.$$

Da aber die Determinante von $C$ nicht verschwindet, muß von den Zahlen $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}$ mindestens eine $\neq 0$ sein, und folglich kann man die $a_{\mu 1}$ so wählen, daß gewiß $c_{11}^* \neq 0$ wird. Wir wenden jetzt vollständige Induktion an, indem wir, unter $k$ irgendeinen der Indizes $2, 3, \dots, n$ verstehend, annehmen, durch geeignete Wahl der $a_{\mu\varkappa}$ und $b_{\varkappa\mu}$ für $\varkappa < k$ sei bereits erreicht, daß $c_{\varkappa\varkappa}^*$ für $\varkappa < k$ von Null verschieden ist; dann wollen wir zeigen, daß durch geeignete Wahl der $a_{\mu k}$ und $b_{k\mu}$ auch $c_{kk}^* \neq 0$ wird.

Nun ist nach (24)

$$(25)\qquad c_{kk}^* = \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\mu=k}^{n} b_{k\lambda} c_{\lambda\mu} a_{\mu k},$$

wobei $a_{kk} = 1$, $b_{kk} = 1$ zu setzen ist. Die in die Summe (25) eingehenden $c_{\lambda\mu}$, das sind die Größen

$$(26)\qquad \begin{cases} c_{1k}, & c_{2k}, & \dots, & c_{kk}, \\ c_{1,k+1}, & c_{2,k+1}, & \dots, & c_{k,k+1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n}, & c_{2n}, & \dots, & c_{kn}, \end{cases}$$

können gewiß nicht alle verschwinden, weil sonst die Determinante der Matrix $C$ selbst verschwinden würde. Wenn etwa $c_{kk} \neq 0$ ist, so wählen wir $a_{\mu k} = 0$ für $\mu > k$ und $b_{k\lambda} = 0$ für $\lambda < k$, wodurch sich ergibt:

$$c_{kk}^* = c_{kk} \neq 0.$$

Wenn aber $c_{kk} = 0$ ist, dagegen eine andere Größe $c_{\lambda k}$ in der ersten Zeile von (26) nicht verschwindet, so wählen wir $a_{\mu k} = 0$ für $\mu > k$, wodurch

sich ergibt:

$$c_{kk}^* = \sum_{\lambda=1}^{k-1} b_{k\lambda} c_{\lambda k}.$$

Da die hier auftretenden $c_{\lambda k}$ nach Annahme nicht alle verschwinden, lassen sich dann die $b_{k\lambda}$ so wählen, daß $c_{kk}^* \neq 0$ ist. Wenn wiederum $c_{kk} = 0$ ist, aber eine andere Größe $c_{k\mu}$ in der letzten Spalte von (26) nicht verschwindet (was nur für $k < n$ einen Sinn hat), so wählen wir $b_{k\lambda} = 0$ für $\lambda < k$, wodurch sich ergibt:

$$c_{kk}^* = \sum_{\mu=k+1}^{n} c_{k\mu} a_{\mu k}.$$

Da die hier auftretenden $c_{k\mu}$ nach Annahme nicht alle verschwinden, lassen sich die $a_{\mu k}$ so wählen, daß $c_{kk}^* \neq 0$ ist.

Schließlich bleibt noch der Fall, daß in dem Schema (26) alle Größen der ersten Zeile und alle Größen der letzten Spalte verschwinden. Dann muß aber eine andere Größe des Schemas von Null verschieden sein, etwa $c_{lm}$, wo nun $l < k$ und $m > k$ ist. In diesem Fall wählen wir $a_{mk} = 1$, $b_{kl} = 1$ und die andern noch freien $a_{\mu k}$, $b_{k\lambda}$ gleich 0. Dadurch ergibt sich

$$c_{kk}^* = c_{lm} \neq 0.$$

Die $a_{\mu k}$, $b_{k\lambda}$ lassen sich also auf jeden Fall so wählen, daß $c_{kk}^* \neq 0$ wird, und damit ist alles erledigt.

## § 4.

## Weiteres über das adjungierte System.

Wenn die Koeffizienten $f_{\nu\mu}(t)$ Konstanten sind oder wenigstens für $t \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte streben, sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des adjungierten Systems entgegengesetzt gleich den Wurzeln der charakteristischen Gleichung des ursprünglichen Systems. Daher sind auch die Ordnungszahlen des einen Systems entgegengesetzt gleich denen des andern Systems, und folglich gelten in Satz 3 lauter Gleichheitszeichen: $\gamma_\nu + \delta_\nu = 0$. Dasselbe wird auch noch in vielen andern Fällen eintreten, man darf aber nicht glauben, daß es immer so sein muß. Beispielsweise hat schon die eine Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = (\sin\log t + \cos\log t)\, x$$

das Integral $x = Ce^{t\sin\log t}$ und also die Ordnungszahl 1; die adjungierte Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = -(\sin\log t + \cos\log t)\, y$$

hat das Integral $y = Ce^{-t \sin \log t}$ und ebenfalls die Ordnungszahl 1. Die Summe ist also nicht 0, sondern 2.

Die Frage, wann in Satz 3 lauter Gleichheitszeichen gelten, wird beantwortet durch den

Satz 4. *In Satz 3 gelten dann und nur dann lauter Gleichheitszeichen:* $\gamma_\nu + \delta_\nu = 0$, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{n} \Re\,(f_{\lambda\lambda}(\tau))\, d\tau$$

*existiert und gleich* $\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu$ *ist.*

Man beachte zunächst, daß dieser Grenzwert nach Satz 2 nie größer als $\sum \gamma_\nu$ sein kann. Um nun Satz 4 zu beweisen, setzen wir unter Beibehaltung der Bezeichnung des § 3

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = v, \qquad \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = w, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = c,$$

so daß $vw = c$ ist. Wie beim Beweis von Satz 2 gelten dann die Formeln (vgl. (10) und (11))

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \log |v| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu, \tag{27}$$

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \log |w| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu, \tag{28}$$

$$v = a e^{\int_0^t \sum_{\lambda=1}^{n} f_{\lambda\lambda}(\tau)\, d\tau}. \tag{29}$$

Nun nehmen wir zuerst an, daß durchweg $\gamma_\nu + \delta_\nu = 0$ ist. Dann muß notwendig

$$\underline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \log |v| \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \tag{30}$$

sein; denn aus der gegenteiligen Annahme und der Formel (28) würde folgen

$$0 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log |c| = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log |vw| < \sum_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu + \delta_\nu) = 0,$$

was nicht sein kann. Aus den Formeln (27) und (30) ergibt sich aber sogleich

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log |v| = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \tag{31}$$

oder also, wenn man für $v$ den Wert aus (29) einsetzt,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{\lambda=1}^{n}\Re\left(f_{\lambda\lambda}(\tau)\right)d\tau=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu. \tag{32}$$

Umgekehrt, wenn diese Gleichung statthat, so gilt zunächst wegen (29) auch (31). Setzt man dann mit der Bezeichnung des § 3

$$C^{-1}Y=X^{-1}=Z=\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ z_{n1} & \cdots & z_{nn}\end{pmatrix},$$

so ist auch $\frac{dZ}{dt}=-ZF$; also ist $z_\nu=z_{\lambda\nu}$ ein Integral des adjungierten Systems (14). Da aber $z_{\lambda\nu}=\frac{\xi_{\nu\lambda}}{v}$, wo $\xi_{\nu\lambda}$ der Minor von $x_{\nu\lambda}$ in der Determinante $v$ ist, so ist mit Rücksicht auf (31)

$$|z_{\lambda\nu}|<e^{(-\gamma_\lambda+\varepsilon)t},$$

wo $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl sein darf, wenn nur $t$ groß genug, und folglich

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\log\operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n}|z_{\lambda\nu}|\leqq-\gamma_\lambda. \tag{33}$$

Das adjungierte System hat also ein Integral, nämlich $z_\nu=z_{1\nu}$, dessen Ordnungszahl $\leqq-\gamma_1$ ist, und da sie nach Satz 3 nicht kleiner als $-\gamma_1$ sein kann, ist sie genau gleich $-\gamma_1$. Das adjungierte System hat aber weiter ein von $z_{1\nu}$ unabhängiges Integral, nämlich $z_\nu=z_{2\nu}$, dessen Ordnungszahl nach (33) $\leqq-\gamma_2$ ist, und da sie nach Satz 3 nicht kleiner als $-\gamma_2$ sein kann, ist sie genau gleich $-\gamma_2$. So weiterschließend findet man als Ordnungszahlen des adjungierten Systems die Zahlen $-\gamma_1$, $-\gamma_2$, …, $-\gamma_n$. Damit ist Satz 4 bewiesen; zugleich erkennt man, daß unter den Bedingungen dieses Satzes die Integrale $z_{\lambda\nu}$ dieselben Dienste leisten wie in § 3 die $y_{\lambda\nu}$. Man könnte daher $Y=Z=X^{-1}$ wählen, also für $C$ die Einheitsmatrix.

## § 5.

## Stabilität und Instabilität der Ordnungszahlen.

Wir betrachten jetzt neben dem Differentialgleichungssystem (1) ein abgeändertes System

$$\frac{dx_\nu}{dt}=\sum_{\mu=1}^{n}\left[f_{\nu\mu}(t)+\varphi_{\nu\mu}(t)\right]x_\mu\qquad(\nu=1,2,\ldots,n). \tag{34}$$

Wenn die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}(t)$ für hinreichend große Werte von $t$, etwa für $t\geqq t_0$, verschwinden, so ist jedes Integral des abgeänderten Systems

für $t \geqq t_0$ auch ein Integral des ursprünglichen Systems und umgekehrt. Die Definition der Ordnungszahlen lehrt daher unmittelbar, daß diese für beide Systeme dieselben sind. Darüber hinaus wird man aber geneigt sein zu vermuten, daß, wenn die $|\varphi_{\nu\mu}(t)|$ für genügend große $t$ nur hinreichend klein sind, die Ordnungszahlen des abgeänderten Systems sich nur wenig von denen des ursprünglichen Systems unterscheiden, und daß sie überhaupt dieselben sind, wenn $\lim_{t\to\infty} \varphi_{\nu\mu}(t) = 0$ ist.

Beide Vermutungen lassen sich auch für $n = 1$ sofort bestätigen, indem man das allgemeine Integral wirklich hinschreibt. Für $n > 1$ aber *sind die Vermutungen überraschenderweise falsch*, wie zunächst an einem Beispiel gezeigt werden soll. Das System

$$\begin{cases} x_1' = 0, \\ x_2' = a(\sin\log t + \cos\log t)\, x_2 \end{cases} \qquad (a > 0) \tag{35}$$

hat das allgemeine Integral

$$x_1 = C_1, \qquad x_2 = C_2\, e^{at\sin\log t},$$

und daraus erkennt man sofort, daß die Ordnungszahlen 0 und $a$ sind. Dagegen hat das abgeänderte System

$$\begin{cases} x_1' = 0, \\ x_2' = b\, e^{-ct} x_1 + a(\sin\log t + \cos\log t)\, x_2 \end{cases} \qquad (0 < c < a), \tag{36}$$

wo $b$ eine absolut beliebig kleine Konstante sein soll, das allgemeine Integral

$$x_1 = C_1, \qquad x_2 = e^{at\sin\log t}\Big(C_2 + C_1 b \int_0^t e^{-a\tau\sin\log\tau - c\tau}\, d\tau\Big),$$

und die Ordnungszahlen sind gleich den verschiedenen Werten des oberen Limes

$$\gamma = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log\Big(|C_1| + e^{at\sin\log t}\Big|C_2 + C_1 b \int_0^t e^{-a\tau\sin\log\tau - c\tau}\, d\tau\Big|\Big). \tag{37}$$

Für $C_1 = 0$ ergibt sich $\gamma = a$, also ist die eine Ordnungszahl $a$. Für $C_1 \neq 0$ dagegen sieht man leicht, daß sich der Ausdruck (37) vereinfacht zu

$$\gamma = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log\Big(e^{at\sin\log t} \int_0^t e^{-a\tau\sin\log\tau - c\tau}\, d\tau\Big). \tag{38}$$

Er ist also ebenfalls von $b$ unabhängig. Wir können ihn nicht genau berechnen, wollen ihn aber nach unten abschätzen. Ist $k$ eine positive ganze Zahl und $\varepsilon$ eine Zahl zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für welche noch $a\cos\varepsilon - c = a' > 0$ ist (in (36) wurde ja $c < a$ vorausgesetzt), so ist

für $t = e^{2k\pi+\frac{1}{2}\pi}$

$$e^{at\sin\log t}\int_0^t e^{-a\tau\sin\log\tau-c\tau}\,d\tau > e^{at}\int_{te^{-\pi-\varepsilon}}^{te^{-\pi+\varepsilon}} e^{-a\tau\sin\log\tau-c\tau}\,d\tau$$

$$> e^{at}\int_{te^{-\pi-\varepsilon}}^{te^{-\pi+\varepsilon}} e^{a\tau\cos\varepsilon-c\tau}\,d\tau$$

$$= e^{at}\frac{e^{a'te^{-\pi+\varepsilon}}-e^{a'te^{-\pi-\varepsilon}}}{a'}$$

$$> e^{at}\frac{e^{a'te^{-\pi+\varepsilon}}}{2a'},$$

sofern nur $t$, also $k$ groß genug ist. Daraus folgt aber sogleich

$$\gamma \geqq a + a'e^{-\pi+\varepsilon} > a.$$

Während also die Ordnungszahlen des Systems (35) gleich 0 und $a$ sind sind die des beliebig wenig abgeänderten Systems (36) gleich $a$ und $\gamma$ wo $\gamma > a$ ist.

Dieses eigentümliche Verhalten gibt Veranlassung zu einer neuen Begriffsbildung. Wir ordnen die Ordnungszahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des Systems (1) der Größe nach:

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \cdots \geqq \gamma_n.$$

Ebenso ordnen wir die Ordnungszahlen $\gamma_1', \ldots, \gamma_n'$ des abgeänderten Systems (34) der Größe nach:

$$\gamma_1' \geqq \gamma_2' \geqq \cdots \geqq \gamma_n'.$$

Dann nennen wir die Ordnungszahl $\gamma_k$ *stabil*, wenn jedem positiven $\varepsilon$ ein positives $\delta$ so zugeordnet werden kann, daß für $|\varphi_{\nu\mu}(t)| \leqq \delta$ stets $|\gamma_k' - \gamma_k| \leqq \varepsilon$ ist; natürlich genügt es, die Ungleichung $|\varphi_{\nu\mu}(t)| \leqq \delta$ nur für genügend große $t$ zu verlangen. Andernfalls heißt die Ordnungszahl $\gamma_k$ *instabil*.

Aus der Definition der Stabilität folgt sofort, daß, falls $\gamma_k$ stabil ist für $\lim_{t\to\infty}\varphi_{\nu\mu}(t) = 0$ stets $\gamma_k' = \gamma_k$ sein wird.

Bei dem System (35) sind nach dem Bewiesenen beide Ordnungszahlen instabil.

## § 6.

## Berechnung von Ordnungszahlen.

Da nach § 5 kleine Änderungen der Koeffizienten große Änderungen der Ordnungszahlen zur Folge haben können, so ist die numerische Berechnung der Ordnungszahlen aus den Koeffizienten gewiß keine leichte Aufgabe. Wir wollen jetzt einige Fälle angeben, in denen eine brauchbare Abschätzung oder sogar eine genaue formelmäßige Berechnung und Konstatierung der Stabilität möglich ist.

Satz 5. *Wenn die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

*für genügend große Werte von $t$, etwa $t \geqq t_0$, den Ungleichungen*

$$\Re(f_{11}(t)) \geqq P(t) + 2(n-1)\, Q(t)$$

*genügen, wobei*

$$P(t) = \operatorname*{Max}_{\lambda=2}^{n} \Re(f_{\lambda\lambda}(t)), \qquad Q(t) = \operatorname*{Max}_{\nu \neq \mu}^{1,n} |f_{\nu\mu}(t)|$$

*ist, so ist die größte Ordnungszahl $\gamma$ zwischen den folgenden Grenzen eingeschlossen:*

$$\gamma \begin{cases} \leqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t [\Re(f_{11}(\tau)) + (n-1)\, Q(\tau)]\, d\tau, \\ \geqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t [\Re(f_{11}(\tau)) - (n-1)\, Q(\tau)]\, d\tau. \end{cases}$$

Satz 6. *Wenn die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

*den Bedingungen genügen*

$$\lim_{t\to\infty} f_{\nu\mu}(t) = 0 \qquad (\text{für } \nu \neq \mu),$$

$$\Re(f_{11}(t)) \geqq \Re(f_{\lambda\lambda}(t)) + c \quad (\text{für } t \geqq t_0;\ \lambda = 2, 3, \ldots, n),$$

*wo $c$ eine positive Konstante, so ist die größte Ordnungszahl stabil und hat den Wert*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \Re(f_{11}(\tau))\, d\tau.$$

Satz 6 ist eine leichte Folge von Satz 5. Denn dieser liefert für die größte Ordnungszahl $\gamma$ sofort die Schranken

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t [\Re(f_{11}(\tau)) \pm \delta]\, d\tau,$$

wo $\delta$ eine beliebig kleine Konstante sein darf. Daher hat $\gamma$ den in Satz 6 behaupteten Wert. Die Stabilität folgt sofort, wenn man die Koeffizienten ein klein wenig abändert und dann die neue größte Ordnungszahl wieder nach Satz 5 abschätzt.

Nun ist noch Satz 5 zu beweisen. Aus dem dortigen Differentialgleichungssystem ergibt sich für $t \geqq t_0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_\nu|^2 = \sum_{\mu=1}^{n} \Re(f_{\nu\mu}(t)\,\bar{x}_\nu x_\mu) \leqq \Re(f_{\nu\nu}(t))\,|x_\nu|^2 + \sum_{\mu}^{\neq\nu} Q(t)\,|x_\nu x_\mu|$$

$$\leqq \Re(f_{\nu\nu}(t))\,|x_\nu|^2 + Q(t)\sum_{\mu}^{\neq\nu} \frac{|x_\nu|^2+|x_\mu|^2}{2}$$

und analog auch

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_\nu|^2 \geqq \Re(f_{\nu\nu}(t))\,|x_\nu|^2 - Q(t)\sum_{\mu}^{\neq\nu} \frac{|x_\nu|^2+|x_\mu|^2}{2}.$$

Aus diesen Ungleichungen folgen aber für $t \geqq t_0$ nach den Voraussetzungen von Satz 5 die beiden weiteren:

$$(39)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2 \leqq \Re(f_{11}(t))\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2 + (n-1)\,Q(t)\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2,$$

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left(|x_1|^2 - \displaystyle\sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu|^2\right) \\ \geqq \Re(f_{11}(t))\,|x_1|^2 - P(t)\displaystyle\sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu|^2 - (n-1)\,Q(t)\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2 \\ = [\Re(f_{11}(t)) - (n-1)\,Q(t)]\,|x_1|^2 - [P(t)+(n-1)\,Q(t)]\displaystyle\sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu|^2 \\ \geqq [\Re(f_{11}(t)) - (n-1)\,Q(t)]\left(|x_1|^2 - \displaystyle\sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu|^2\right). \end{cases}$$

Die Ungleichung (39) besagt, daß die Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2 \cdot e^{-2\int_0^t [\Re(f_{11}(\tau))+(n-1)\,Q(\tau)]\,d\tau}$$

für $t \geqq t_0$ eine nicht positive Ableitung hat. Sie nimmt also monoton ab und folglich ist für jedes Integral

$$(41)\qquad 2\gamma = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\log\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2 \leqq \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{2}{t}\int_0^t [\Re(f_{11}(\tau)) + (n-1)\,Q(\tau)]\,d\tau.$$

Analog besagt die Ungleichung (40), daß die Funktion

$$\left(|x_1|^2 - \sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu|^2\right)\cdot e^{-2\int_0^t [\Re(f_{11}(\tau))-(n-1)\,Q(\tau)]\,d\tau}$$

für $t \geqq t_0$ eine nicht negative Ableitung hat; folglich nimmt sie monoton zu. Wählt man daher die Anfangswerte eines Integrals so, daß die Funktion

$$|x_1|^2 - \sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu|^2$$

für $t = t_0$ positiv ist, so bleibt sie auch für $t > t_0$ dauernd positiv; für dieses Integral ist dann

$$(42)\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\log\left(|x_1|^2-\sum_{\nu=2}^{n}|x_\nu|^2\right)\geqq\overline{\lim_{t=\infty}}\frac{2}{t}\int_0^t[\Re(f_{11}(\tau))-(n-1)Q(\tau)]\,d\tau$$

und daher erst recht

$$(43)\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\log\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2\geqq\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{2}{t}\int_0^t[\Re(f_{11}(\tau))-(n-1)Q(\tau)]\,d\tau.$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Satz 7. *Wenn die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems*

$$\frac{dx_\nu}{dt}=\sum_{\mu=1}^{n}f_{\nu\mu}(t)\,x_\mu\qquad(\nu=1,2,\ldots,n)$$

*den Bedingungen genügen*

$$(A)\quad \lim_{t\to\infty}f_{\nu\mu}(t)=0\qquad(\text{für }\nu\neq\mu),$$

$$(B)\quad \Re(f_{\nu-1,\nu-1}(t)-f_{\nu\nu}(t))\geqq c\qquad(\text{für }t\geqq t_0;\ \nu=2,3,\ldots,n),$$

*wo $c$ eine positive Konstante ist, und wenn*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\Re(f_{\nu\nu}(\tau))\,d\tau=\gamma_\nu\qquad(\nu=1,2,\ldots,n)$$

*gesetzt wird, so sind die Ordnungszahlen einfach die Zahlen $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß auf Grund der Voraussetzungen gewiß

$$(44)\quad \gamma_1>\gamma_2>\cdots>\gamma_n$$

ist. Satz 7 wird daher bewiesen sein, wenn sich zeigen läßt, daß zu jedem der Werte $\lambda=1,2,\ldots,n$ ein Integral $x_{\nu\lambda}$ existiert, für welches

$$(45)\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\log\sum_{\nu=1}^{n}|x_{\nu\lambda}|=\gamma_\lambda$$

ist. Nun besagt aber ein früher von mir bewiesener Satz[5]), daß es unter den Voraussetzungen von Satz 7 zu jedem $\lambda$ ein Integral $x_{\nu\lambda}$ gibt, für welches

$$(46)\quad \lim_{t\to\infty}\frac{x_{\nu\lambda}}{x_{\lambda\lambda}}=0,$$

$$(47)\quad \lim_{t\to\infty}\left(\frac{x'_{\lambda\lambda}}{x_{\lambda\lambda}}-f_{\lambda\lambda}(t)\right)=0$$

ist. Dieses Integral erfüllt die Bedingung (45); denn aus (47) folgt, wenn $\varepsilon$

[5]) Satz 2 meiner Arbeit: Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reell ist (erste Mitteilung). Journal f. d. reine und angewandte Mathematik **142** (1913), S. 254—270.

eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, für genügend große $t$

$$e^{\int_0^t \Re(f_{\lambda\lambda}(\tau))\,d\tau - \varepsilon t} < |x_{\lambda\lambda}| < e^{\int_0^t \Re(f_{\lambda\lambda}(\tau))\,d\tau + \varepsilon t},$$

und daher ist mit Rücksicht auf (46) auch

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \sum_{\nu=1}^{n} |x_{\nu\lambda}| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \Re(f_{\lambda\lambda}(\tau))\,d\tau = \gamma_\lambda, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Bei dieser Gelegenheit sei ein Fehler berichtigt, der sich in dem Beweis des soeben erwähnten Satzes befindet. Auf S. 261 unten a. a. O. handelt es sich nämlich um den Nachweis der Formel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_\infty^x u_\lambda\,dx}{\frac{z_{\lambda\lambda}}{y_{11}}} = 0.$$

In dem Bruch streben Zähler und Nenner nach Null, weshalb die Hôpitalsche Regel angewandt wurde. Das ist aber nicht erlaubt, da der Nenner nicht reell zu sein braucht. Der Fehler läßt sich leicht beseitigen, denn die fragliche Formel ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_\infty^x u_\lambda\,dx}{\left|\frac{z_{\lambda\lambda}}{y_{11}}\right|} = 0.$$

Jetzt ist der Nenner reell; man darf daher die Hôpitalsche Regel anwenden und erhält für den fraglichen Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u_\lambda}{\frac{d}{dx}\left|\frac{z_{\lambda\lambda}}{y_{11}}\right|} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|\frac{y_{11}}{z_{\lambda\lambda}}\right| u_\lambda}{\frac{d}{dx}\log\left|\frac{z_{\lambda\lambda}}{y_{11}}\right|} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|\frac{y_{11}}{z_{\lambda\lambda}}\right| u_\lambda}{\frac{d}{dx}\,\Re\left(\log\frac{z_{\lambda\lambda}}{y_{11}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|\frac{y_{11}}{z_{\lambda\lambda}}\right| u_\lambda}{\Re\left(\frac{z'_{\lambda\lambda}}{z_{\lambda\lambda}} - \frac{y'_{11}}{y_{11}}\right)}.$$

Hier strebt nun, wie a. a. O., der Zähler nach Null, während der Nenner unterhalb einer negativen Schranke bleibt, so daß der Bruch nach Null geht, w. z. b. w.

(Eingegangen am 19. Oktober 1929.)

# Stammbruchentwickelungen für die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl.

Von

G. Stratemeyer in Mainz.

Entwickelt man die Quadratwurzel aus einer positiven rationalen Zahl $D$ in eine Engelsche Stammbruchreihe zweiter Art[1]), so ist kein Gesetz zu erkennen, nach dem die Nenner der Stammbrüche fortschreiten. Das wird, wie ich bemerkt habe, anders, wenn man den Ausdruck $a - \sqrt{D}$ nach Stammbrüchen entwickelt und dabei für $a$ einen geeigneten, zu großen rationalen Näherungswert der Quadratwurzel setzt.

Sei $D$ eine rationale Zahl größer als 1 mit irrationaler Quadratwurzel, so daß also die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ durch zwei positive ganze Zahlen $t, u$ befriedigt werden kann, wo $t > u$. Dann ist $t : u$ ein geeigneter Näherungswert. In der Tat, es ist

$$\frac{t}{u} - \sqrt{D} = \frac{1}{u(t + u\sqrt{D})}$$

und es wird

$$\frac{1}{u(t+u\sqrt{D})} - \frac{1}{2tu} = \frac{t - u\sqrt{D}}{2tu(t+u\sqrt{D})} = \frac{1}{2tu(t+u\sqrt{D})^2} > 0,$$

dagegen

$$\frac{1}{u(t+u\sqrt{D})} - \frac{1}{2tu-1} < 0,$$

denn

$$2tu - 1 - u(t + u\sqrt{D}) = u(t - u\sqrt{D}) - 1 = \frac{-u}{t + u\sqrt{D}} - 1 < 0.$$

---

[1]) Diese Bezeichnung hat O. Perron in seinem Buche über die Irrationalzahlen benutzt. Nach einer Mitteilung Perrons hat sich inzwischen herausgestellt, daß gerade diese Stammbruchentwickelung schon 1880 von Sylvester betrachtet worden ist, allerdings nur angewandt auf rationale Zahlen. Siehe: On a point in the theory of vulgar fractions, American Journal **3**, S. 332—335 und Postscript S. 388f.

Der erste Stammbruch in der Entwickelung von $(t:u)-\sqrt{D}$ wird daher $1:2tu$. Dieser liefert einen neuen Näherungswert, nämlich

$$\frac{t}{u}-\frac{1}{2tu}=\frac{2t^2-1}{2tu}=\frac{t_1}{u_1},$$

wo $t_1, u_1$ ihrerseits die Gleichung $t_1^2-Du_1^2=1$ erfüllen.

Demnach erhält man die Stammbruchentwickelung

$$\frac{t_0}{u_0}-\sqrt{D}=\frac{1}{2t_0u_0}+\frac{1}{2t_1u_1}+\cdots$$

oder

$$\frac{t_0}{u_0}-\sqrt{D}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots,$$

wobei

$$t_{\nu+1}=2t_\nu^2-1, \qquad u_{\nu+1}=2t_\nu u_\nu \qquad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

In ganz ähnlicher Weise läßt sich $t:u\sqrt{D}$ in ein Cantorsches Stammbruchprodukt entwickeln, wenn $t$ und $u$ dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Es ist ja $t^2-Du^2=1$, also:

$$\frac{t^2}{Du^2}=\frac{t^2}{t^2-1}=\frac{(2t^2-1)+1}{(2t^2-1)-1}=\frac{t_1+1}{t_1-1}.$$

Auf Grund der Engelschen Formel (Perron: Irrationalzahlen, S. 127) lautet daher die Produktentwickelung

$$\frac{t_0}{u_0\sqrt{D}}=\frac{\sqrt{t_1+1}}{\sqrt{t_1-1}}=\left(1+\frac{1}{t_1}\right)\left(1+\frac{1}{t_2}\right)\cdots,$$

wo

$$t_{\nu+1}=2t_\nu^2-1 \qquad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

Es ist bemerkenswert, daß in der einen Entwickelung die Nenner, in der anderen die Zähler der Näherungswerte $t_\nu:u_\nu$ auftreten.

(Eingegangen am 29. Oktober 1929.)

# Uber die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme.

Von

Alfred Haar in Szeged.

## Einleitung.

1. Das Problem, das wir in der vorliegenden Arbeit behandeln, entspringt aus einer Analogie der orthogonalen Funktionensysteme mit den hyperkomplexen Zahlensystemen von $n$ Haupteinheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, worauf kurz hingewiesen werden soll.

Bekanntlich spielen in der Theorie dieser Zahlensysteme diejenigen Größen $\gamma_{pqr}$ eine fundamentale Rolle, vermöge deren man das Produkt zweier Haupteinheiten definiert:

$$\varepsilon_p \varepsilon_q = \sum_{r=1}^{n} \gamma_{pqr} \varepsilon_r \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n);$$

den Ausgangspunkt dieser Theorie bilden ja eben diejenigen Beziehungen, die diese $\gamma_{pqr}$ erfüllen müssen, damit die so definierte Multiplikation assoziativ sei; man kann aber geradezu die ganze Disziplin der hyperkomplexen Systeme als die Theorie solcher kubischen Matrizen $(\gamma_{pqr})$ auffassen. Eine wegen ihrer Wichtigkeit vielfach behandelte Frage ist die Aufstellung und Diskussion aller Zahlensysteme mit kommutativer Multiplikation, die die nächstliegendste Verallgemeinerung der gewöhnlichen komplexen Größen sind.

Die in einer beliebigen meßbaren Punktmenge $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s), \ldots$ spielen in gewisser Hinsicht in der Gesamtheit der Funktionen $f(s)$, die in $\mathfrak{M}$ samt ihrem Quadrat integrierbar sind, eine ähnliche Rolle, wie die Haupteinheiten in einem hyperkomplexen Zahlensystem, indem man in bekannter Weise die Fourierschen Koeffizienten

$$a_p = \int_{\mathfrak{M}} f(s)\, \varphi_p(s)\, ds \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

als Bestimmungsstücke der Funktion $f(s)$ betrachtet, und in diesem Sinne

$$f(s) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_p \varphi_p(s)$$

ansetzt. Legt man diese Auffassung zugrunde, so werden — in Analogie mit der soeben erwähnten Tatsache über hyperkomplexe Systeme mit endlichvielen Haupteinheiten — in der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme die Fourierschen Koeffizienten der Produkte $\varphi_p(s)\,\varphi_q(s)$, d. h. die Größen

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,\varphi_r(s)\,ds \qquad (p, q, r = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

die in den Entwicklungen

$$\varphi_p(s)\,\varphi_q(s) \sim \sum_{r=1}^{\infty} c_{pqr}\,\varphi_r(s)$$

auftreten, die ähnliche Rolle spielen, wie die eben mit $\gamma_{pqr}$ bezeichneten Größen in der Theorie der hyperkomplexen Zahlen. Wir wollen die unendliche kubische Matrix $(c_{pqr})$ als die *Multiplikationstabelle des Orthogonalsystems* $\varphi_p(s)$ bezeichnen, wobei vorausgesetzt ist, daß die Integrale (1) existieren, was bei einem willkürlichen Orthogonalsystem nicht der Fall zu sein braucht. Beachtet man noch, daß die Funktionen eines Orthogonalsystems in dieser Auffassung als die unendlichvielen Haupteinheiten eines *kommutativen* Zahlensystems zu betrachten sind, so gelangt man in voller Analogie zu der oben erwähnten algebraischen Fragestellung zu dem folgenden Problem, das vor etwa zwei Jahrzehnten von meinem Freund Ernst Fischer in mündlichen Gesprächen, die mich zu den vorliegenden Untersuchungen anregten, gestellt wurde:

*Welchen Bedingungen müssen die unendlichvielen Größen $c_{pqr}$ genügen, damit ein solches orthogonales Funktionensystem existiere, dessen Multiplikationstabelle durch diese Größen gebildet wird?*

Es liegt dieser Fragestellung die Auffassung zugrunde, daß man im Besitze dieser Bedingungen bzw. im Besitze solcher Größen $c_{pqr}$, die diesen Bedingungen genügen, das zugehörige Orthogonalsystem durch *innere Eigenschaften* charakterisiert hat. Da ferner die fraglichen Bedingungen, wie die folgenden Untersuchungen zeigen werden, einen algebraischen Charakter haben (freilich in der Algebra von unendlichvielen Unbestimmten), so gelangt man zu einer algebraischen Theorie der orthogonalen Funktionensysteme und die erwähnte Analogie legt den Gedanken nahe, daß die wesentlichen Eigenschaften eines Orthogonalsystems sich in entsprechenden algebraischen Eigenschaften seiner Multiplikationstabelle widerspiegeln.

2. Wir beschäftigen uns im folgenden ausschließlich mit Orthogonalsystemen von der Beschaffenheit, daß der absolute Betrag jeder Funktion

des Systems fast überall unterhalb einer endlichen Schranke liegt, die aber nicht für alle Funktionen des Systems dieselbe zu sein braucht; d. h. es gilt für alle $s$ in $\mathfrak{M}$ mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null

$$|\varphi_p(s)| \leqq M_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ein solches System bezeichnen wir als ein *beschränktes* Orthogonalsystem; daß man bei der Behandlung des genannten Problems eine Einschränkung über die Natur der Orthogonalfunktionen machen muß, folgt ja schon aus der oben gemachten Bemerkung, daß die Existenz der Multiplikationstabelle, d. h. der Integrale (1) für ein beliebiges Orthogonalsystem nicht gewährleistet ist.

Es wird sich ferner als zweckmäßig erweisen, einen etwas allgemeineren Begriff als die gewöhnliche Orthogonalität heranzuziehen; wir werden auch Systeme von unendlichvielen beschränkten Funktionen $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots, \omega_p(s), \ldots$ betrachten, welche in einem Intervall $a \leqq s \leqq b$ definiert und so beschaffen sind, daß diese gemeinschaftlich mit einer im selben Intervall definierten nichtabnehmenden Funktion $\sigma(s)$ die Beziehungen

$$\int_a^b \omega_p(s)\,\omega_q(s)\,d\sigma(s) = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{für } p \gtrless q, \\ 1 & \text{für } p = q \end{cases}$$

erfüllen, wobei das Integral ein Stieltjessches ist. Wir sagen, die *Funktionen $\omega_p(s)$ bilden in bezug auf $\sigma(s)$ ein beschränktes Orthogonalsystem*; dieser Begriff, der übrigens, wie wir sehen werden, leicht auf den ursprünglichen Begriff der Orthogonalität zurückführbar ist, tritt in der Literatur in Verbindung mit der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen auf. Wir werden der Einfachheit halber (was übrigens keine wesentliche Einschränkung ist) solche verallgemeinerte Orthogonalsysteme nur in dem Falle behandeln, wo alle $\omega_p(s)$ stetige Funktionen sind.

Das gewöhnliche Orthogonalsystem $\varphi_p(s)$ heißt *vollständig* oder *abgeschlossen*[1]), wenn die sog. Vollständigkeitsrelation

$$(2) \qquad \int_{\mathfrak{M}} u(s)\,v(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathfrak{M}} \varphi_k(s)\,u(s)\,ds\right)\left(\int_{\mathfrak{M}} \varphi_k(s)\,v(s)\,ds\right)$$

für alle Funktionen $u(s)$, $v(s)$, die samt ihren Quadraten im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind, erfüllt ist; bekanntlich genügt es, das Bestehen der obigen Relation für stetige Funktionen $u(s)$, $v(s)$ voraus-

[1]) Die Eigenschaften eines Orthogonalsystems, für die man ursprünglich die Bezeichnungen „abgeschlossen" bzw. „vollständig" einführte, erwiesen sich später, bei Benutzung des Lebesgueschen Integralbegriffs, als äquivalent. Ich benutze in dieser Arbeit vornehmlich den ersten Ausdruck mit Rücksicht auf den in 3. eingeführten Begriff des „in sich abgeschlossenen" Orthogonalsystems.

zusetzen. In gleicher Weise wird das im Intervall $a \leqq s \leqq b$ definierte, in bezug auf die nichtabnehmende Funktion $\sigma(s)$ orthogonale Funktionensystem $\omega_p(s)$ als *abgeschlossen* bezeichnet, wenn für jedes stetige Funktionenpaar $u(s)$, $v(s)$ (im betrachteten Intervall) die Relation

$$(2') \qquad \int_a^b u(s)\, v(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \omega_k(s)\, u(s)\, d\sigma(s) \int_a^b \omega_k(s)\, v(s)\, d\sigma(s)$$

erfüllt ist. Als Fouriersche Koeffizienten einer willkürlichen Funktion $f(s)$ bezeichnet man in diesem Falle die Größen $\int_a^b f(s)\, \omega_p(s)\, d\sigma(s)$ und dementsprechend werden wir wiederum die Fourierschen Koeffizienten der Produkte $\omega_p(s)\, \omega_q(s)$, d. h. die Größen

$$(1') \qquad c_{pqr} = \int_a^b \omega_p(s)\, \omega_q(s)\, \omega_r(s)\, d\sigma(s) \qquad (p, q, r = 1, 2, 3, \ldots)$$

als die *Multiplikationstabelle* dieses in bezug auf $\sigma(s)$ orthogonalen Funktionensystems bezeichnen.

3. Wir beginnen mit der Aufzählung einiger einfachen Eigenschaften der Multiplikationstabelle eines abgeschlossenen beschränkten Orthogonalsystems, die sowohl für den ursprünglichen Begriff als auch für die Orthogonalität in bezug auf $\sigma(s)$ statthaben. In erster Reihe nennen wir die *Symmetrie* in den Indizes, d. h. die Beziehungen

$$c_{pqr} = c_{prq} = c_{qpr} = c_{qrp} = c_{rpq} = c_{rqp},$$

einerlei, ob die Größen $c_{pqr}$ durch (1) oder (1′) definiert sind. Wir betrachten ferner die unendlichvielen quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen

$$(3) \qquad C_p(x_1, x_2, x_3, \ldots) = C_p(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots);$$

die zugehörigen Matrizen bezeichnen wir stets mit denselben Buchstaben, ohne die Unbestimmten hinzuzuschreiben. Man erkennt unmittelbar, daß jede dieser Formen *beschränkt* ist, d. h. alle „Abschnitte“ von $C_p(x)$ erfüllen die Ungleichung

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{p\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, [x_1 \varphi_1(s) + x_2 \varphi_2(s) + \ldots + x_n \varphi_n(s)]^2\, ds$$
$$\leqq M_p (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

bzw.

$$= \int_a^b \omega_p(s)\, [x_1 \omega_1(s) + x_2 \omega_2(s) + \ldots + x_n \omega_n(s)]^2\, d\sigma(s)$$
$$\leqq \operatorname{Max}\,(|\omega_p(s)|)\, (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

mit Rücksicht darauf, daß $\sigma(s)$ eine nichtabnehmende Funktion bedeutet; folglich ist die Hilbertsche Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen auf unseren Fall anwendbar. Nach den Hilbertschen Faltungssätzen (vgl. 3. § 1 dieser Arbeit) ist die quadratische Form, deren Matrix das formal gebildete Produkt der Matrizen $C_p$ und $C_q$ ist, d. h. die Matrix, deren allgemeines Element

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{p\alpha k}\, c_{q k \beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, \varphi_\alpha(s)\, \varphi_k(s)\, ds \int_{\mathfrak{M}} \varphi_q(s)\, \varphi_\beta(s)\, \varphi_k(s)\, ds$$

bzw.

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \omega_p(s)\, \omega_\alpha(s)\, \omega_k(s)\, d\sigma(s) \int_a^b \omega_q(s)\, \omega_\beta(s)\, \omega_k(s)\, d\sigma(s)$$

ist, ebenfalls beschränkt. Setzt man in der Vollständigkeitsrelation (2) $u(s) = \varphi_p(s)\, \varphi_\alpha(s)$, $v(s) = \varphi_q(s)\, \varphi_\beta(s)$ bzw. in (2′) für $u(s)$ und $v(s)$ die stetigen Funktionen $\omega_p(s)\, \omega_\alpha(s)$ bzw. $\omega_q(s)\, \omega_\beta(s)$ ein, so erkennt man, daß die so entstandene quadratische Form — wir bezeichnen sie mit $C_p C_q(x)$ —

$$C_p C_q(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} x_\alpha x_\beta \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, \varphi_\alpha(s)\, \varphi_\beta(s)\, ds$$

bzw.

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} x_\alpha x_\beta \int_a^b \omega_p(s)\, \omega_q(s)\, \omega_\alpha(s)\, \omega_\beta(s)\, d\sigma(s)$$

ist. Die Vertauschung der Indizes liefert das Resultat

$$C_p C_q(x) = C_q C_p(x),$$

d. h. die Vertauschbarkeit der in (3) definierten quadratischen Formen bzw. der zugehörigen Matrizen.

Bezeichnet man die Fourierschen Koeffizienten der Funktion $f(s) = 1$ mit $e_1, e_2, e_3, \ldots$, d. h. setzt man

$$e_p = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, ds \quad \text{bzw.} \quad e_p = \int_a^b \omega_p(s)\, d\sigma(s),$$

so erkennt man unmittelbar (indem man in (2) bzw. in (2′) $u = v = 1$ einsetzt) die Konvergenz der unendlichen Reihe $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \ldots$, ferner — indem man in (2) $u = 1$, $v = \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)$ bzw. in (2′) $u = 1$, $v = \omega_p(s)\, \omega_q(s)$ einsetzt — die Richtigkeit der Relationen

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k\, c_{pqk} = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man kann diese Beziehungen durch Einführung der Einheitsmatrix

$$\mathsf{E} = (\delta_{pq})$$

in der Form der Matrizengleichung

$$e_1 C_1 + e_2 C_2 + e_3 C_3 + \ldots = \mathsf{E}$$

schreiben.

Bei der Ableitung dieser Tatsachen haben wir von den Vollständigkeitsrelationen (2) bzw. (2′) nur insofern Gebrauch gemacht, daß wir ihre Richtigkeit für die Fälle

$$(4) \quad \begin{cases} u = 1, \quad v = \varphi_p(s)\,\varphi_q(s) \quad \text{und} \quad u = \varphi_p(s)\,\varphi_\alpha(s), \quad v = \varphi_\beta(s)\,\varphi_q(s) \\ \text{bzw.} \\ u = 1, \quad v = \omega_p(s)\,\omega_q(s) \quad \text{und} \quad u = \omega_p(s)\,\omega_\alpha(s), \quad v = \omega_\beta(s)\,\omega_q(s) \end{cases}$$

benutzt haben. Die erwähnten Tatsachen bleiben also auch dann richtig, *wenn die Relationen* (2) *bzw.* (2′) *nicht für alle Funktionen* $u(s)$, $v(s)$, *sondern nur für diese Funktionen* (4) *gültig sind.* Dies bedeutet mit anderen Worten, daß man die Abgeschlossenheit der vorgelegten Systeme $\varphi_p(s)$ bzw. $\omega_p(s)$ aufgibt und statt deren eine geringere Voraussetzung einführt, die damit gleichbedeutend ist, daß man annimmt, daß — im Falle des Orthogonalsystems $\varphi_p(s)$ — die Produkte $\varphi_p(s)\,\varphi_q(s)$ sowie die Funktion $f(s) = 1$ durch lineare Aggregate der $\varphi_p(s)$ im Mittel beliebig genau angenähert werden können, d. h. so, daß

$$\int_{\mathfrak{M}} [\varphi_p(s)\,\varphi_q(s) - a_1^{(p,q)}\varphi_1(s) - a_2^{(p,q)}\varphi_2(s) - \ldots - a_n^{(p,q)}\varphi_n(s)]^2\,ds < \varepsilon,$$

$$\int_{\mathfrak{M}} [1 - a_1\varphi_1(s) - a_2\varphi_2(s) - \ldots - a_n\varphi_n(s)]^2\,ds < \varepsilon$$

ausfalle, wobei $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Größe bedeutet; im Falle des Systems $\omega_p(s)$ bedeutet die Annahme die Existenz solcher Größen, daß

$$\int_a^b [\omega_p(s)\,\omega_q(s) - a_1^{(p,q)}\omega_1(s) - a_2^{(p,q)}\omega_2(s) - \ldots - a_n^{(p,q)}\omega_n(s)]^2\,d\sigma(s) < \varepsilon,$$

$$\int_a^b [1 - a_1\omega_1(s) - a_2\omega_2(s) - \ldots - a_n\omega_n(s)]^2\,d\sigma(s) < \varepsilon$$

sei. Ein Orthogonalsystem dieser Art wollen wir in beiden Fällen als *in sich abgeschlossen* bezeichnen. Das Bestehen der Vollständigkeitsrelationen (2) bzw. (2′) für die Funktionen $u = v = 1$ und $u = v = \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)$ bzw. $u = v = \omega_p(s)\,\omega_q(s)$ ist die Bedingung dafür, daß das betreffende Orthogonalsystem in sich abgeschlossen sei, da daraus die Richtigkeit dieser Relationen für die Funktionen (4) folgt und umgekehrt.

Wir können diese Tatsachen wie folgt zusammenfassen: *Die Multiplikationstabelle* $(c_{pqr})$ *eines beschränkten und in sich abgeschlossenen* (*also auch eines abgeschlossenen*) *Orthogonalsystems ist stets so beschaffen, daß*

I. *die Symmetriebedingungen*

$$c_{pqr} = c_{prq} = c_{qpr} = c_{qrp} = c_{rpq} = c_{rqp}$$

*erfüllt sind,*

II. *die unendlichvielen quadratischen Formen von unendlichvielen Unbestimmten*

$$C_p(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

*beschränkt und vertauschbar sind,*

III. *ein System von Größen* $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *von konvergenter Quadratsumme existiert, für die die Matrizengleichung*

$$\sum_{p=1}^{\infty} e_p C_p = \mathsf{E}$$

*statthat. Dieselben Bedingungen sind erfüllt, wenn* $(c_{pqr})$ *die Multiplikationstabelle eines stetigen und in sich abgeschlossenen, in bezug auf eine nichtabnehmende Funktion orthogonalen Funktionensystems bedeutet.*

Wir zitieren in der Folge diese drei Eigenschaften als Bedingungen I bzw. II, III.

4. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit zu zeigen, daß diese Eigenschaften, die sich als *notwendige Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines solchen Orthogonalsystems* erwiesen, auch *hinreichend* sind. Es gelten nämlich die folgenden Sätze:

Satz 1. *Erfüllen die Größen* $c_{pqr}$ $(p, q, r = 1, 2, 3, \ldots)$ *die obigen Bedingungen* I, II, III, *so existieren stets solche in einem Intervall* $a \leqq s \leqq b$ *definierte stetige Funktionen* $\omega_p(s)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, *die in bezug auf eine im selben Intervall definierte nichtabnehmende Funktion* $\sigma(s)$ *ein abgeschlossenes orthogonales Funktionensystem bilden:*

$$\int_a^b \omega_p(s)\,\omega_q(s)\,d\sigma(s) = \delta_{pq},$$

*dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen* $c_{pqr}$ *besteht:*

$$\int_a^b \omega_p(s)\,\omega_q(s)\,\omega_r(s)\,d\sigma(s) = c_{pqr}.$$

Satz 2. *Erfüllen die Größen* $c_{pqr}$ *die Bedingungen* I, II, III, *so existiert stets ein in* $a \leqq s \leqq b$ *definiertes beschränktes und in sich abgeschlossenes (gewöhnliches) Orthogonalsystem* $\varphi_p(s)$, *dessen Multiplikationstabelle mit der kubischen Matrix* $(c_{pqr})$ *übereinstimmt, d. h. für*

*welches*

$$\int_a^b \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,ds = \delta_{pq}, \qquad \int_a^b \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,\varphi_r(s)\,ds = c_{pqr}$$

*ist* [2]).

Die Grundlage der Beweise dieser Sätze ist die Hilbertsche Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen [3]). Ich habe mir erlaubt, in einem einleitenden Paragraphen diejenigen Sätze dieser Theorie zusammenzustellen, von denen ich in den folgenden Untersuchungen Gebrauch mache, und finde dabei Gelegenheit die in den folgenden Paragraphen benutzten Bezeichnungen zu erläutern. Einer soeben erschienenen Arbeit von Herrn J. v. Neumann [4]) entnehme ich einen wichtigen Gedanken, den ich im § 2 anwende (vgl. 1. 2. § 2). Satz 10 der genannten Abhandlung steht in enger Berührung mit der im § 2 der vorliegenden Arbeit gegebenen Konstruktion des Funktionensystems $\omega_p(s)$. Die oben ausgesprochenen Sätze werden im § 3 bewiesen. In einer Schlußbemerkung führe ich den Begriff der *isomorphen Orthogonalsysteme* ein; die über solche Orthogonalsysteme angegebenen Sätze gedenke ich in einer anderen Arbeit zu beweisen.

## § 1.

## Zusammenstellung einiger Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

1. Um den Gedankengang unserer Untersuchungen nicht unterbrechen zu müssen, wollen wir diejenigen Sätze der genannten Theorie zusammenstellen, auf denen unser Beweis fußt. Die Grundlage bildet die Hilbertsche Theorie der beschränkten reellen quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen; es sei

$$K(x_1, x_2, x_3, \ldots) = K(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} k_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$$

eine solche Form, wobei die Unbestimmten der Bedingung unterworfen sind, daß ihre Quadratsumme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots = \mathsf{E}(x)$$

---

[2]) In der Schlußbemerkung (§ 4) wird darauf hingewiesen, wie man den Begriff der Orthogonalität modifizieren muß, damit man — bei Vermeidung des Stieltjesschen Integralbegriffes — zu einem *abgeschlossenen* Funktionensystem mit der Multiplikationstabelle $(c_{pqr})$ gelangt.

[3]) Dargelegt in der 4. Mitteilung der „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", Göttinger Nachrichten 1906, S. 157–227.

[4]) „Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren", Math. Annalen **102** (1929), S. 370–427.

konvergent ist; die zugehörige symmetrische unendliche Matrix $(k_{\alpha\beta})$ (die wir beschränkte Matrix nennen) bezeichnen wir stets mit demselben Buchstaben, ohne die Unbestimmten hinzuzuschreiben. Insbesondere ist $\mathsf{E} = (\delta_{\alpha\beta})$ die Einheitsmatrix ($\mathsf{E}(x)$ die Einheitsform), wobei — wie üblich — $\delta_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \leqq \beta$ und $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ gesetzt ist.

Wir formulieren das fundamentale Theorem dieser Theorie in der folgenden — für unsere Anwendungen bequemsten — Form:

Jede beschränkte, reelle quadratische Form läßt sich durch ein Stieltjessches Integral folgendermaßen darstellen:

$$K(x) = \int_m^M \mu \, d\sigma(\mu; x),$$

wobei

$$\sigma(\mu; x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\mu) x_\alpha x_\beta$$

für jeden Wert von $\mu$ im Intervall $m \leqq \mu \leqq M$ eine beschränkte quadratische Form bedeutet, deren Wertevorrat so beschaffen ist, daß $\sigma(\mu; x)$ bei jedem zulässigen Wertsystem der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine nichtabnehmende, an jeder inneren Stelle des Intervalls von links stetige Funktion von $\mu$ darstellt, die den Gleichungen

$$\sigma(m; x) = 0, \qquad \sigma(M; x) = \mathsf{E}(x)$$

genügt.

Eine Stelle $\mu = \mu_0$ gehört dem Spektrum der vorgelegten Form an, wenn es kein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß im Intervall $\mu_0 - \varepsilon \leqq \mu \leqq \mu_0 + \varepsilon$ alle $\sigma_{\alpha\beta}(\mu)$ konstant sind; ist $\mu$ eine Stelle des Spektrums, so gibt es ein Wertsystem $x_1, x_2, x_3, \ldots$, für das $K(x) = \mu_0$ ist. Die dem Spektrum nicht angehörenden Werte sind durch die Eigenschaft charakterisiert, daß zu jeder solchen Stelle $\mu_1$ eine beschränkte symmetrische Matrix $\mathsf{K}$ existiert, so daß

$$(K - \mu_1 \mathsf{E})\,\mathsf{K} = \mathsf{K}(K - \mu_1 \mathsf{E}) = \mathsf{E}$$

ist.

Es gelten für $m \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq M$ die Matrizengleichungen

$$(5) \qquad (\sigma_{\alpha\beta}(\mu_1))(\sigma_{\alpha\beta}(\mu_2)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\mu_2))(\sigma_{\alpha\beta}(\mu_1)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\mu_1)),$$

aus denen die für alle stetigen Funktionen $u(\mu)$, $v(\mu)$ geltenden Beziehungen

$$(5') \qquad \int_m^M u(\mu)\, v(\mu)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_m^M u(\mu)\, d\sigma_{\alpha k}(\mu) \int_m^M v(\mu)\, d\sigma_{k\beta}(\mu)$$

folgen, die man als Hilbertsche Vollständigkeitsrelationen bezeichnet[5]).

[5]) Satz 32 und 33 der in [3]) angeführten Abhandlung von Hilbert.

Die Matrizengleichungen (5) sind Spezialfälle der Beziehungen (5′); sie ergeben sich, wenn man

$$u(\mu)=1 \quad \text{für} \quad m \leqq \mu \leqq \mu_1, \qquad u(\mu)=0 \quad \text{für} \quad \mu_1 < \mu \leqq M$$

und

$$v(\mu)=1 \quad \text{für} \quad m \leqq \mu \leqq \mu_2, \qquad v(\mu)=0 \quad \text{für} \quad \mu_2 < \mu \leqq M$$

setzt. Umgekehrt folgt aus (5) die Richtigkeit von (5′) für Treppenfunktionen $u(\mu)$ und $v(\mu)$ unmittelbar und sodann in bekannter Weise für alle solche Funktionen, die man durch streckenweise konstante Funktionen approximieren kann, insbesondere für alle stetigen Funktionen.

2. Als Einzelform bezeichnet Hilbert eine beschränkte quadratische Form $E(x)$, deren Matrix der Bedingung $E^2 = E$ genügt. Über solche Formen gilt die folgende Bemerkung, die uns im folgenden von Nutzen sein wird.

Genügen die nicht identisch verschwindenden[6]) Einzelformen $E_1(x)$, $E_2(x), \ldots, E_n(x)$ den Bedingungen

$$E_p E_q = E_q E_p = 0 \quad \text{für} \quad p \gtrless q,$$

so enthält das Spektrum der quadratischen Form

$$K(x) = a_1 E_1(x) + a_2 E_2(x) + \ldots + a_n E_n(x)$$

die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Würde nämlich etwa $a_p$ nicht dem Spektrum von $K(x)$ angehören, so könnte man eine beschränkte Matrix $\mathsf{K}$ angeben, so daß

$$(K - a_p \mathsf{E})\,\mathsf{K} = (a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots + a_n E_n - a_p \mathsf{E})\,\mathsf{K} = \mathsf{E}$$

wäre; daraus folgt aber durch Multiplikation mit $E_p$

$$E_p = 0,$$

im Widerspruch mit unserer Annahme. Insbesondere folgt aus dieser Bemerkung, daß falls $K(x)$ positiv definit ist, alle Koeffizienten $a_p$ nicht negativ sein müssen, da das Spektrum — wie oben bemerkt — dem Wertevorrat der Form angehört.

Es ist auch leicht zu zeigen, daß das Spektrum von $K(x)$ außer den Stellen $a_p$ nur noch die Null enthalten kann; setzt man nämlich (für $\lambda \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$)

$$\mathsf{K} = \sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{\lambda(a_p - \lambda)} E_p - \frac{1}{\lambda}\mathsf{E},$$

so findet man unmittelbar $(K - \lambda \mathsf{E})\,\mathsf{K} = \mathsf{E}$.

[6]) Die Matrix, deren sämtliche Elemente Null sind — man bezeichnet sie mit 0 —, ist die identisch verschwindende Matrix.

3. Der sogenannte erste Hilbertsche Faltungssatz enthält die Aussage, daß falls $A = (a_{\alpha\beta})$ und $B = (b_{\alpha\beta})$ zwei beschränkte Matrizen sind, so ist es auch die Matrix

$$AB = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{\alpha k} b_{k\beta}\Big);$$

ist $C = (c_{\alpha\beta})$ eine dritte Matrix dieser Art, so lehrt der sogenannte zweite Faltungssatz, daß $(AB)C = A(BC)$ ist. Sind die symmetrischen Matrizen $A$ und $B$ vertauschbar, so ist die Matrix $AB = BA$ ebenfalls symmetrisch; die zugehörige quadratische Form bezeichnen wir mit $AB(x)$ oder $BA(x)$.

Wir sagen mit Herrn F. Riesz[7]), daß eine Folge von symmetrischen Matrizen $A^{(n)} = (a_{\alpha\beta}^{(n)})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gegen die Matrix $A = (a_{\alpha\beta})$ konvergiert, falls für alle $\alpha, \beta$

$$\lim_{n=\infty} a_{\alpha\beta}^{(n)} = a_{\alpha\beta}$$

ist und falls eine von $n$ unabhängige Größe $M$ existiert derart, daß für jedes Wertsystem der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Ungleichungen

$$|A^{(n)}(x)| = |\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(n)} x_\alpha x_\beta| \leqq M\,\mathsf{E}(x)$$

erfüllt sind. Man zeigt unschwer[8]), daß wenn in diesem Sinne die Limesgleichung $A^{(n)} \to A$ statthat, $B$ aber eine beliebige beschränkte Matrix bedeutet, so gilt auch

$$A^{(n)}B \to AB \quad \text{und} \quad BA^{(n)} \to BA.$$

4. Mit Hilfe dieses letzten Satzes ergibt sich in einfacher Weise das folgende Resultat über die Spektraldarstellung vertauschbarer Formen[9]):

Sind $K'(x)$ und $K''(x)$ vertauschbare Formen, deren Spektraldarstellung

$$K'(x) = \int_{m'}^{M'} \mu'\, d\sigma(\mu'; x) \quad \text{bzw.} \quad K''(x) = \int_{m''}^{M''} \mu''\, d\sigma(\mu''; x)$$

ist, so sind die beiden Formen von unendlichvielen Veränderlichen

$$\sigma'(\mu'; x) \quad \text{und} \quad \sigma''(\mu''; x)$$

bei jedem in Betracht kommenden Wert der Parameter $\mu'$ und $\mu''$ ebenfalls vertauschbar.

Denn es folgt zunächst wegen der angenommenen Vertauschbarkeit von $K'$ und $K''$ die Vertauschbarkeit der beiden Matrizen

$$f(K') = c_0' K'^{\nu} + c_1' K'^{\nu-1} + \ldots + c_{\nu-1}' K' + c_\nu' \mathsf{E},$$
$$g(K'') = c_0'' K''^{\lambda} + c_1'' K''^{\lambda-1} + \ldots + c_{\lambda-1}'' K'' + c_\lambda'' \mathsf{E}.$$

[7]) „Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues", Paris 1913, S. 107.
[8]) Vgl. F. Riesz, a. a. O. S. 128.
[9]) Vgl. J. v. Neumann, a. a. O. [4]) S. 400 unten.

Es sei nun $f_n(\mu')$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine monoton wachsende Folge von Polynomen, die gegen diejenige streckenweise konstante Funktion konvergiert, die für $m' \leqq \mu' \leqq \mu_0'$ gleich 1, für $\mu_0' < \mu' \leqq M'$ gleich 0 ist und es sei analog $g_m(\mu'')$ eine monoton wachsende Folge von Polynomen, so daß

$$\lim_{m=\infty} g_m(\mu'') = 1 \qquad \text{für} \quad m'' \leqq \mu'' \leqq \mu_0'',$$
$$\lim_{m=\infty} g_m(\mu'') = 0 \qquad \text{für} \quad \mu_0'' < \mu'' \leqq M'';$$

dann gelten die Limesgleichungen

$$\begin{aligned} K_n' &= f_n(K') \to \sigma'(\mu_0'), \\ K_m'' &= f_m(K'') \to \sigma''(\mu_0''), \end{aligned} \qquad n \to \infty,$$

wobei $\sigma'(\mu_0')$ bzw. $\sigma''(\mu_0'')$ die zu den quadratischen Formen $\sigma'(\mu_0'; x)$ bzw. $\sigma''(\mu_0''; x)$ gehörende Matrix bezeichnet.

Wird in der Relation

$$K_n' K_m'' = K_m'' K_n'$$

zunächst $m$ festgehalten und der Grenzübergang $n \to \infty$ vollzogen, so erhält man (durch Anwendung des in 3. erwähnten Satzes)

$$\sigma'(\mu_0') K_m'' = K_m'' \sigma'(\mu_0');$$

der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert die zu beweisende Relation

$$\sigma'(\mu_0') \sigma''(\mu_0'') = \sigma''(\mu_0'') \sigma'(\mu_0').$$

5. Noch eine Bemerkung über das Stieltjessche Integral, das ja schon in der Hilbertschen Spektraldarstellung auftritt. Es kommen in der vorliegenden Arbeit solche Integrale

$$\int f(s)\, dg(s)$$

vor, in denen $g(s)$ eine nichtabnehmende Funktion bedeutet, $f(s)$ aber nicht notwendig stetig ist, sondern eventuell Unstetigkeiten erster Art besitzen kann. Die Verallgemeinerung des ursprünglichen Stieltjesschen Begriffes, mit dem wir hier auskommen, ist das sogenannte Stieltjes-Riemannsche Integral; für die Existenz des obigen Integrals in diesem Sinne ist es notwendig und hinreichend, daß man bei jedem $\varepsilon > 0$ diejenigen Stellen, an denen $f(s)$ einen größeren Sprung als $\varepsilon$ erleidet, in endlichviele Intervalle so einschließen kann, daß die Summe der Zuwächse von $g(s)$ in diesen Intervallen beliebig klein sei[10]).

[10]) Über das Stieltjes-Riemannsche Integral vgl. H. Lebesgue: „Leçons sur l'intégration", 2. Auflage, Paris 1925, S. 271–290, insbesondere S. 275–277.

## § 2.

## Konstruktion des Funktionensystems $\omega_p$.

1. Wir legen unseren Untersuchungen die unendlichvielen beschränkten quadratischen Formen

$$C_p(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

zugrunde, welche die in der Einleitung genannten Bedingungen I, II, III erfüllen. In diesem Paragraphen wird übrigens nur die Bedingung II — die die Vertauschbarkeit der Matrizen $C_p$ aussagt — benutzt und es bleiben alle Entwicklungen dieses Paragraphen richtig, wenn die $C_p(x)$ nicht quadratische, sondern vertauschbare beschränkte Hermitesche Formen der unendlichvielen Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bedeuten. Durch Anwendung des Hilbertschen Theorems stellen wir jede dieser Formen durch ein Stieltjessches Integral dar:

$$C_p(x) = \int_{m_p}^{M_p} \mu_p \, d\sigma^{(p)}(\mu_p; x), \tag{6}$$

wobei die zugehörigen Spektralformen

$$\sigma^{(p)}(\mu_p; x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}^{(p)}(\mu_p) x_\alpha x_\beta \qquad (m_p \leqq \mu_p \leqq M_p)$$

die in 1. § 1 angegebenen Eigenschaften besitzen, und es sind alle diese Einzelformen miteinander vertauschbar (vgl. 4. § 1). Aus der Menge dieser Formen greifen wir eine abzählbare, überall dicht liegende Teilmenge heraus, indem wir für jedes $p$ eine abzählbare, im Intervall $m_p \leqq \mu_p \leqq M_p$ überall dichte Punktmenge $\mu_p^{(1)}, \mu_p^{(2)}, \mu_p^{(3)}, \ldots$ bestimmen; wir bezeichnen diese Punktmenge mit $\mathfrak{M}_p$. Die Gesamtheit der Einzelformen

$$\sigma^{(p)}(\mu_p^{(q)}; x) \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

wollen wir in irgendeiner Reihenfolge mit

$$E_1(x), E_2(x), E_3(x), \ldots, E_n(x), \ldots \tag{7}$$

bezeichnen; wir nehmen der Einfachheit halber an, daß eine dieser $E_n(x)$ die Einheitsform $\mathsf{E}(x)$ ist. Nach dem Vorgange von Herrn J. v. Neumann[11]) werden wir aus diesen Formen andere Einzelformen aufbauen, die „der Größe“ nach geordnet sind; das folgende Verfahren, um zu diesen Einzelformen zu gelangen — ein analoges Verfahren wird in der Theorie der hyperkomplexen Größen auf die Idempotente angewandt — unterscheidet sich nur in der Bezeichnungsweise von dem des Herrn v. Neumann.

---

[11]) S. 401 der in [4]) angeführten Arbeit.

Wir erinnern an die bekannte Cantorsche triadische Punktmenge und führen eine Bezeichnungsweise der dabei auftretenden Intervalle ein, die uns von Nutzen sein wird. Das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ denken wir uns in drei gleiche Teile geteilt und das mittlere (offene) Intervall[12]) — wir bezeichnen es mit $J_{11}$ — herausgegriffen; dies ist bekanntlich der erste Schritt der Cantorschen Konstruktion. Der zweite Schritt besteht darin, daß man die beiden übriggebliebenen Intervalle in drei gleiche Teile teilt und die mittleren Intervalle herausgreift; die ersten zwei Schritte liefern daher drei Teilintervalle, die wir in der natürlichen Reihenfolge mit $J_{21}, J_{22}, J_{23}$ bezeichnen; $J_{22}$ ist also mit $J_{11}$ identisch. Dieses Verfahren wird nun fortgesetzt; der dritte Schritt — die analoge Dreiteilung der übriggebliebenen vier Teilintervalle — führt (wenn man die vorher erhaltenen drei Intervalle mitzählt) zu sieben Teilintervallen, die wir in der natürlichen Reihenfolge mit $J_{31}, J_{32}, J_{33}, J_{34}, J_{35}, J_{36}, J_{37}$ bezeichnen, wobei also $J_{32} = J_{21}$, $J_{34} = J_{22} = J_{11}$, $J_{36} = J_{23}$ ist. Auf diese Weise fahre man fort; nach dem $n$-ten Schritt gelangt man zu $2^n - 1$ Teilintervallen, die wir — wiederum in der natürlichen Reihenfolge — mit

$$J_{n\,m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1})$$

bezeichnen. Die Bezeichnungsweise ist also so gewählt, daß für $m_1 < m_2$ das Intervall $J_{n\,m_1}$ dem Intervall $J_{n\,m_2}$ vorangeht, ferner ist

$$J_{n\,m} = J_{n+k,\,2^k m} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus den Einzelformen (7) bzw. aus den zugehörigen Matrizen $E_n$ bauen wir nun neue Matrizen $E_{n\,m}$ wie folgt auf: Wir setzen

$$E_{11} = E_1,$$
$$E_{21} = E_2 E_{11}, \quad E_{22} = E_{11}, \quad E_{23} = E_{11} + E_2(\mathsf{E} - E_{11}),$$

und definieren rekursiv

$$\begin{aligned}
&E_{n1} = E_n E_{n-1,1}, \quad E_{n2} = E_{n-1,1},\\
&E_{n3} = E_{n-1,1} + E_n(E_{n-1,2} - E_{n-1,1}), \quad E_{n4} = E_{n-1,2},\\
&\cdots\cdots\cdots

die Beziehungen

$$E_{nm} = E_{n+k,\,2^k m} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

gelten, ferner (durch Induktionsschluß), daß die Matrizen $E_{nm}$ ganz und rational durch die vorgelegten $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ausdrückbar sind. Daher sind die $E_{nm}$ miteinander und mit den Matrizen (7) vertauschbar.

2. Wir ordnen nun jedem Punkt des Intervalls $0 \leqq \lambda \leqq 1$, der *innerhalb* des obigen Intervalls $J_{nm}$ liegt, die Form $E_{nm}(x)$ zu und zeigen, daß durch diese Zuordnung für jedes Wertsystem der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine in $\lambda$ nicht abnehmende Funktion definiert ist, die natürlich innerhalb jedes Intervalls $J_{nm}$ konstant ist. In der Tat, ist $\lambda_1 < \lambda_2$ und liegen beide Stellen innerhalb eines der obigen Intervalle, so wird für ein hinreichend großes $n$ der Punkt $\lambda_1$ in $J_{nm_1}$, $\lambda_2$ in $J_{nm_2}$ liegen, wobei $m_1 \leqq m_2$ ist. Unsere Behauptung ist daher in den für alle $x_1, x_2, x_3, \ldots$ geltenden Ungleichungen

$$(9) \qquad 0 \leqq E_{n1}(x) \leqq E_{n2}(x) \leqq \ldots \leqq E_{n,\,2^n-1}(x) \leqq \mathsf{E}(x)$$

enthalten, die man durch Induktionsschluß folgendermaßen verifizieren kann: Aus der Konstruktion der $E_{nm}$ folgen unmittelbar die Beziehungen

$$E_{n,\,2k} - E_{n,\,2k-1} = (\mathsf{E} - E_n)\,(E_{n-1,\,k} - E_{n-1,\,k-1}),$$
$$E_{n,\,2k+1} - E_{n,\,2k} = E_n\,(E_{n-1,\,k+1} - E_{n-1,\,k})$$

und

$$\mathsf{E} - E_{n,\,2^n-1} = (\mathsf{E} - E_{n-1,\,2^{n-1}-1})\,(\mathsf{E} - E_n), \qquad E_{n1} = E_n E_{n-1},$$

woraus man durch Schluß von $n-1$ auf $n$ unmittelbar erkennt, daß die in diesen Beziehungen links stehenden Matrizen Einzelmatrizen sind, da das Produkt vertauschbarer Einzelformen wieder eine Einzelform ist. Die Richtigkeit der Ungleichungen (9) folgt aus der Tatsache, daß eine Einzelform positiv definit oder semidefinit ist.

In ganz analoger Weise wird gezeigt, daß für $m_1 \leqq m_2$

$$(10) \qquad E_{nm_1} E_{nm_2} = E_{nm_1}$$

ist, indem man die $E_{nm}$ durch die Matrizen $E_{n-1,\,m}$ und $E_n$ ausdrückt und die entsprechende Tatsache für die Matrizen $E_{n-1,\,m}$ als richtig voraussetzt (für $E_{11}$ ist sie ja trivial). Insbesondere folgt hieraus (für $m_1 = m_2$), daß alle Formen $E_{nm}$ Einzelformen sind; wir notieren noch die folgende Relation, die durch Addition der Definitionsgleichungen (8) entspringt,

$$(11) \qquad \begin{aligned} E_n &= E_{n1} + (E_{n3} - E_{n2}) + (E_{n5} - E_{n4}) + \ldots + (E_{n,\,2^n-1} - E_{n,\,2^n-2}) \\ &= E_{n,\,2^n-1} - (E_{n,\,2^n-2} - E_{n,\,2^n-3}) - \ldots - (E_{n4} - E_{n3}) - (E_{n2} - E_{n1}), \end{aligned}$$

die im folgenden eine wichtige Rolle spielt.

Indem wir den Intervallen $J_{nm}$ die entsprechenden Formen $E_{nm}$ zuordnen, haben wir — wie oben bewiesen — bei jedem Wertsystem der

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine nicht abnehmende Funktion von $\lambda$ in der Punktmenge, die aus der Vereinigung dieser Intervalle besteht, definiert. Da diese Vereinigungsmenge überall dicht im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ist, so kann man mit Leichtigkeit den Definitionsbereich auf dieses ganze Intervall erweitern; man kann auch erreichen, daß die entstehende ebenfalls monotone Funktion an jeder Stelle von links stetig sei. Ist nämlich $\sigma(\lambda; x)$ die zum Punkte $\lambda$ zugeordnete Form, wobei zunächst $\lambda$ einem der Intervalle $J_{nm}$ angehört, $\lambda_0$ aber ein Punkt der Komplementärmenge, so bestimme man eine gegen $\lambda_0$ strebende monoton wachsende Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, so daß jedes $\lambda_k$ in einem der Intervalle $J_{nm}$ liegt, und setze

$$\sigma(\lambda_0; x) = \lim_{k=\infty} \sigma(\lambda_k; x).$$

Wegen der Monotonität von $\sigma(\lambda; x)$ in der obigen Punktmenge folgt unmittelbar, daß dieser Grenzwert unabhängig von der speziellen Wahl der gegen $\lambda_0$ wachsend strebenden Folge $\lambda_k$ ist, ferner — da alle Formen $E_{nm}(x)$ und damit auch $\sigma(\lambda; x)$ kleiner als $\mathsf{E}(x)$ sind —, daß die obige Limesgleichung für die entsprechenden Matrizen die Limesgleichung

$$\sigma(\lambda_k) \to \sigma(\lambda_0) \qquad k \to \infty \tag{12}$$

in dem in 3. § 1 festgesetzten Sinne zur Folge hat. Wir setzen noch $\sigma(0; x) = 0$ und zeigen, daß $\sigma(1; x) = \mathsf{E}(x)$ sein muß. In der Tat, wäre für irgendein Wertsystem $\sigma(1; x) = \mathsf{E}(x) - \delta$, wo $\delta > 0$ ist, so wäre wegen der Monotonität von $\sigma(\lambda; x)$ in $\lambda$ — für alle zulässigen Wertepaare $n, m$ $E_{nm}(x) \leqq \mathsf{E}(x) - \delta$, also — wie man aus der zweiten Form der Relation (11) unmittelbar entnimmt — für alle $n$

$$E_n(x) \leqq E_{n2^n-1}(x) \leqq \mathsf{E}(x) - \delta,$$

in Widerspruch damit, daß eine der Formen $E_n(x)$ die Einheitsform ist.

Setzen wir

$$\sigma(\lambda; x) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\, x_\alpha x_\beta,$$

so sind die Matrizenrelationen

$$(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1))\,(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_2)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1)) \qquad \lambda_1 \leqq \lambda_2 \tag{13}$$

für solche $\lambda_1$ und $\lambda_2$, die den Intervallen $J_{nm}$ angehören, mit den Gleichungen (10) identisch. Es übertragen sich nun diese Relationen unmittelbar auf alle Punkte des Intervalls $0 \leqq \lambda \leqq 1$ durch passende Anwendung des in 3. § 1 genannten Satzes auf die Limesgleichung (12).

3. Ein offenes Teilintervall von $0 \leqq \lambda \leqq 1$ bezeichnen wir als *Konstanzintervall* von $\sigma(\lambda; x)$, falls für zwei beliebige Punkte $\lambda'$ und $\lambda''$ dieses Intervalls die Gleichung $\sigma(\lambda'; x) = \sigma(\lambda''; x)$ bei jedem zulässigen Wertsystem der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ statthat und falls dieses Intervall nicht echter

Teil eines größeren Intervalls derselben Art ist. (Die obigen Intervalle $J_{nm}$ sind entweder selbst Konstanzintervalle oder Teile von Konstanzintervallen.) Da zufolge dieser Definition die Konstanzintervalle nicht ineinandergreifen, so ist ihre Menge endlich oder abzählbar; wir bezeichnen sie in irgendeiner Reihenfolge mit $i_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ und den Mittelpunkt des $k$-ten Konstanzintervalls mit $h_k$.

Wir betrachten nun irgendeine der Einzelformen $E_n(x)$ und schreiben für diese die Relation (11) in der Form

$$(11') \quad E_n(x) = (\sigma(\lambda_1; x) - \sigma(0; x)) + (\sigma(\lambda_3; x) - \sigma(\lambda_2; x)) + (\sigma(\lambda_5; x) - \sigma(\lambda_4; x)) + \ldots + (\sigma(\lambda_{2^n-1}; x) - \sigma(\lambda_{2^n-2}; x)),$$

wobei $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots \leqq \lambda_{2^n-1}$ ist und jeder der Punkte $\lambda_k$ einem Intervall $J_{nm}$, also um so mehr einem Konstanzintervall angehört. Man kann annehmen, daß diese $\lambda_k$ alle verschieden sind, sogar in verschiedenen Konstanzintervallen liegen, da im entgegengesetzten Falle die entsprechenden Glieder in der Darstellung $(11')$ identisch in den $x$ verschwinden würden. Es möge etwa $\lambda_k$ dem Konstanzintervall $i_{n_k}$ angehören; wir können annehmen, daß es mit dem Mittelpunkt $h_{n_k}$ dieses Intervalls zusammenfällt, und es ist $h_{n_1} < h_{n_2} < h_{n_3} < \ldots$ .

Es sei nun $f_n(\lambda)$ diejenige streckenweise konstante Funktion, die gleich 1 ist in den endlichvielen *abgeschlossenen Intervallen*

$$0 \leqq \lambda \leqq h_{n_1}, \quad h_{n_2} \leqq \lambda \leqq h_{n_3}, \quad h_{n_4} \leqq \lambda \leqq h_{n_5}, \quad \ldots,$$

sonst aber überall gleich 0, so daß die endlichvielen Sprungstellen dieser Funktion in die Mittelpunkte gewisser Konstanzintervalle fallen. Mit Hilfe dieser Funktionen kann man die Gleichung $(11')$ in der Form eines Stieltjesschen Integrals, wie folgt schreiben:

$$E_n(x) = \int_0^1 f_n(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x).$$

Wir wenden nun diese Darstellung für diejenigen Formen $E_n(x)$ an, die — bei der Konstruktion dieser Formen in 1. § 2 — aus $\sigma^{(p)}(\mu_p; x)$ entstanden sind, indem darin für $\mu_p$ die Punkte $\mu_p^{(q)}$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ der in $m_p \leqq \mu_p \leqq M_p$ überall dichten Punktmenge $\mathfrak{M}_p$ eingesetzt wurden. Es ergibt sich in dieser Weise für jede dieser Formen eine Darstellung

$$(14) \qquad \sigma^{(p)}(\mu_p^{(q)}; x) = \int_0^1 f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})\, d\sigma(\lambda; x),$$

wobei für jeden der Menge $\mathfrak{M}_p$ angehörenden Wert von $\mu_p^{(q)}$ die Funktion $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ dieselben Eigenschaften besitzt, wie die oben mit $f_n(\lambda)$ bezeichnete Funktion: sie ist streckenweise konstant (ihr Wert ist überall 0

oder 1) und ihre endlichvielen Sprungstellen fallen in die Mittelpunkte gewisser Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x)$. Wichtig für das Folgende ist die Tatsache, daß aus $\mu_p^{(q_1)} > \mu_p^{(q_2)}$ die für alle $\lambda$ geltende Ungleichung

$$F(\lambda) = f_p(\lambda, \mu_p^{(q_1)}) - f_p(\lambda, \mu_p^{(q_2)}) \geqq 0$$

folgt.

In der Tat, die Funktion $F(\lambda)$ ist ebenfalls eine streckenweise konstante Funktion, deren endlichviele Sprungstellen nur die obigen Mittelpunkte der Konstanzintervalle sein können. Ferner kann diese Funktion nur die Werte $0, +1, -1$ annehmen; wir werden eben zeigen, daß sie nirgends gleich $-1$ ist. Wäre nämlich $F(\lambda) = -1$ in den endlichvielen Intervallen

$$h_{m_k} \leqq \lambda \leqq h_{m_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{15}$$

und gleich $+1$ für

$$h_{m'_k} \leqq \lambda \leqq h_{m'_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu'), \tag{15'}$$

anderswo aber gleich Null, so hätte man

$$\sigma^{(p)}(\mu_p^{(q_1)}; x) - \sigma^{(p)}(\mu_p^{(q_2)}; x) = \int_0^1 F(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x)$$
$$= \sum_{k=1}^{\nu'} [\sigma(h_{m'_{k+1}}; x) - \sigma(h_{m'_k}; x)] - \sum_{k=1}^{\nu} [\sigma(h_{m_{k+1}}; x) - \sigma(h_{m_k}; x)].$$

Nun ist einerseits die links stehende Form positiv definit, andererseits erfüllen die rechts in eckigen Klammern stehenden Formen mit Rücksicht darauf, daß die in (15) und (15′) angegebenen Intervalle keinen gemeinsamen Punkt haben, wegen (13) die Bedingungen des in 2. § 1 erwähnten Hilfssatzes (d. h. jede dieser Formen ist eine Einzelform, und das Produkt je zweier ist $= 0$). Folglich müßte — falls es in der Tat Intervalle gibt, wo $F(\lambda) = -1$ ist — der Wert $(-1)$ dem Spektrum der links stehenden Form angehören, in Widerspruch damit, daß diese Form positiv definit ist.

4. Wir betrachten in der $\lambda, \mu$-Ebene das Rechteck $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $m_p \leqq \mu \leqq M_p$; indem wir in unserer Funktion $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ den Parameter $\mu_p^{(q)}$ als zweite unabhängige Veränderliche auffassen, können wir sagen, daß die Funktion $f_p(\lambda, \mu)$ in einer überall dichten Punktmenge des obigen Rechtecks definiert ist, nämlich in denjenigen Punkten $\lambda, \mu$, deren $\mu$-Koordinate der in $m_p \leqq \mu \leqq M_p$ überall dichten Punktmenge $\mathfrak{M}_p$ angehört. Die zuletzt abgeleitete Eigenschaft von $f_p$ ermöglicht es, die Definition dieser Funktion auf das ganze Rechteck zu erweitern. Da nämlich $f_p(\lambda, \mu)$ bei jedem festen $\lambda$ eine in $\mathfrak{M}_p$ definierte nicht abnehmende Funktion von $\mu$ ist, die nur die Werte 0, 1 annimmt, so ist an einer $\mathfrak{M}_p$ nicht angehörenden Stelle der Wert dieser Funktion durch die Forderung, daß sie von links stetig

sei, eindeutig festgelegt. Mit anderen Worten, wir setzen fest, daß, wenn $\mu$ der Menge $\mathfrak{M}_p$ nicht angehört, $f_p(\lambda, \mu) = 0$ sei, falls für alle $\mathfrak{M}_p$ angehörenden $\mu_p^{(q)}$, die kleiner als $\mu$ sind, $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)}) = 0$ ist; im entgegengesetzten Falle, wo es also einen Wert $\mu_p^{(q)}$, der $\mathfrak{M}_p$ angehört und kleiner als $\mu$ ist, gibt, für den $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)}) = 1$ ist, setzen wir $f_p(\lambda, \mu) = 1$. Fügen wir noch die Festsetzung $f_p(\lambda, m_p) = 0$ (für alle $\lambda$) hinzu, so ist die Funktion $f_p(\lambda, \mu)$ an jeder Stelle des obigen Rechtecks eindeutig festgelegt. Ihre Haupteigenschaften sind die folgenden:

1°. sie nimmt nur die Werte 0 und 1 an;

2°. gehört $\mu_p^{(q)}$ der in $m_p \leqq \mu_p^{(q)} \leqq M_p$ überall dichten Menge $\mathfrak{M}_p$ an, so ist $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$, als Funktion von $\lambda$ aufgefaßt, in endlichvielen abgeschlossenen Intervallen gleich 1;

3°. für jedes feste $\lambda$ ist $f_p(\lambda, \mu)$, als Funktion von $\mu$ betrachtet, eine für $\mu = m_p$ verschwindende, nicht abnehmende Funktion.

Daraus folgt, daß bei jedem festen $\lambda$ diejenigen Werte von $\mu$, für die $f_p(\lambda, \mu) = 0$ ist, ein abgeschlossenes oder offenes Intervall bilden, falls nicht $m_p$ der einzige solche Wert von $\mu$ ist. Daher *muß es zu jedem $\lambda$ einen Wert $\mu_0$*

$$\mu_0 = \omega_p(\lambda)$$

*geben derart, daß für jedes* (im Intervall $[m_p, M_p]$ gelegenen) $\mu < \omega_p(\lambda)$ *die Funktion $f_p(\lambda, \mu) = 0$, für jedes $\mu > \omega_p(\lambda)$ aber die Funktion $f_p(\lambda, \mu) = 1$ ist.* Die auf diese Weise im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierten Funktionen $\omega_p(\lambda)$ spielen im folgenden eine wichtige Rolle; wir beweisen über diese vorab den folgenden Satz:

5. *Jede der Funktionen $\omega_p(\lambda)$, die offenbar für jedes $p$ der Ungleichung*

$$m_p \leqq \omega_p(\lambda) \leqq M_p \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

*genügt, ist an jeder Stelle, die von den Mittelpunkten der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x)$ verschieden ist, stetig; sie besitzt an jeder der letztgenannten Stellen — falls sie nicht daselbst ebenfalls stetig ist — eine Diskontinuität erster Art, d. h. es existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $\omega_p(\lambda + 0)$ und $\omega_p(\lambda - 0)$ auch an diesen Stellen; die Anzahl derjenigen Unstetigkeitsstellen, wo der Sprung von $\omega_p$, d. h. $|\omega_p(\lambda + 0) - \omega_p(\lambda - 0)|$ eine gegebene positive Größe übersteigt, ist endlich.*

Den ersten Teil dieser Behauptung — die Stetigkeit von $\omega_p(\lambda)$ an einer Stelle $\lambda_0$, die von den Mittelpunkten jener Konstanzintervalle verschieden ist — zeigt man folgendermaßen:

Wäre $\omega_p(\lambda)$ an der Stelle $\lambda_0$ nicht stetig, so könnte man eine gegen $\lambda_0$ strebende Folge $\lambda_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ derart angeben, daß

$$\omega = \lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n)$$

von $\omega_p(\lambda_0)$ verschieden ist; wir nehmen etwa $\omega > \omega_p(\lambda_0)$ an. Da der Wertevorrat der Funktion $\omega_p(\lambda)$ zwischen den Grenzen $m_p$ und $M_p$ liegt, die Punktmenge $\mathfrak{M}_p$ aber überall dicht in diesem Intervall ist, so gibt es solche dieser Menge $\mathfrak{M}_p$ angehörenden Werte $\mu_p^{(q)}$, die zwischen $\omega_p(\lambda_0)$ und $\omega$ liegen. Wir denken uns eine solche herausgewählt, so daß also

$$\omega_p(\lambda_0) < \mu_p^{(q)} < \omega$$

ist, und beschränken uns auf so große Werte von $n$, für die

$$\omega_p(\lambda_n) > \mu_p^{(q)} \tag{16}$$

ist. Aus der am Ende von 4. gegebenen Definition der Funktion $\omega_p(\lambda)$ folgt nun unmittelbar, daß

$$f_p(\lambda_0, \mu_p^{(q)}) = 1$$

sein muß; da andererseits die Funktion $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$, als Funktion der einen Veränderlichen $\lambda$ betrachtet, an der Stelle $\lambda = \lambda_0$ stetig ist (ihre Unstetigkeitsstellen können ja nur in die Mittelpunkte der Konstanzintervalle fallen), so gilt auch für hinreichend große $n$

$$f_p(\lambda_n, \mu_p^{(q)}) = 1 .$$

Daraus folgt aber auf Grund der Definition von $\omega_p(\lambda)$

$$\mu_p^{(q)} \geqq \omega_p(\lambda_n),$$

in Widerspruch mit der Ungleichung (16).

In gleicher Weise wird die Annahme $\omega < \omega_p(\lambda_0)$ ad absurdum geführt.

6. Es sei zweitens $\lambda_0$ der Mittelpunkt $h_k$ eines der obigen Konstanzintervalle. Ist $\omega_p(\lambda)$ an dieser Stelle nicht stetig, so kann man eine *monoton wachsend* gegen $\lambda_0$ strebende Folge $\lambda_n'$ und eine *monoton abnehmend* gegen $\lambda_0$ strebende Folge $\lambda_n''$ derart bestimmen, daß die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n') = \omega' \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n'') = \omega''$$

verschieden ausfallen; wir nehmen etwa $\omega' > \omega''$ an (der Fall $\omega' < \omega''$ wird genau so behandelt). Wir können noch annehmen, daß $\omega'$ das Maximum der Grenzwerte $\lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n')$ ist, wobei $\lambda_n'$ wachsend gegen $\lambda_0$ strebt, und analog, daß $\omega''$ das Minimum der Grenzwerte $\lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n'')$ ist, wobei $\lambda_n''$ abnehmend gegen $\lambda_0$ strebt.

Es sei nun wiederum $\mu_p^{(q)}$ *irgendeine Stelle* der Menge $\mathfrak{M}_p$, die zwischen $\omega'$ und $\omega''$ liegt:

$$\omega'' < \mu_p^{(q)} < \omega' . \tag{17}$$

Man kann unschwer zeigen, daß $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ (als Funktion von $\lambda$ allein betrachtet) an der Stelle $\lambda = \lambda_0$ unstetig ist, und zwar ist für hinreichend kleine positive $\varepsilon$

$$f_p(\lambda', \mu_p^{(q)}) = 0 , \quad \text{falls} \quad \lambda_0 - \varepsilon \leqq \lambda' < \lambda_0 , \tag{18'}$$

und

$$f_p(\lambda'', \mu_p^{(q)}) = 1 , \quad \text{falls} \quad \lambda_0 \leqq \lambda'' \leqq \lambda'' + \varepsilon \tag{18''}$$

ist. Denn im entgegengesetzten Falle könnte man — da $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ in endlichvielen abgeschlossenen Intervallen gleich 1, anderswo gleich 0 ist — ein Intervall $\lambda_0 - \delta \leqq \lambda' \leqq \lambda_0$ angeben, $(\delta > 0)$, wo $f_p(\lambda', \mu_p^{(q)}) = 1$, bzw. ein Intervall $\lambda_0 < \lambda'' \leqq \lambda_0 + \delta$, wo $f_p(\lambda', \mu_p^{(q)}) = 0$ ist. Daraus würde aber folgen, daß für hinreichend große $n$

$$f_p(\lambda_n', \mu_p^{(q)}) = 1 \quad \text{bzw.} \quad f_p(\lambda_n'', \mu_p^{(q)}) = 0$$

ist; folglich wäre — mit Rücksicht auf die Definition der Funktion $\omega_p(\lambda)$ —

$$\omega_p(\lambda_n') \leqq \mu_p^{(q)} \quad \text{bzw.} \quad \omega_p(\lambda_n'') \geqq \mu_p^{(q)} ,$$

also auch — indem man zur Grenze $n = \infty$ übergeht —

$$\omega' \leqq \mu_p^{(q)} \quad \text{bzw.} \quad \omega'' \geqq \mu_p^{(q)} ,$$

in Widerspruch damit, daß $\mu_p^{(q)}$ der Ungleichung (17) gemäß gewählt wurde.

Es sei nun $\bar{\lambda}_1' < \bar{\lambda}_2' < \ldots < \bar{\lambda}_n' < \ldots$ eine beliebige andere wachsend gegen $\lambda_0$ strebende Folge; dann ist einerseits — da $\omega'$ das Maximum der obigen Grenzwerte bedeutet — für hinreichend große $n$

$$\omega_p(\bar{\lambda}_n') < \omega' + \delta , \tag{19'}$$

wie auch die positive Größe $\delta$ gewählt ist $(n = n(\delta))$; andererseits ist aber — ebenfalls für hinreichend große $n$ — $\bar{\lambda}_n'$ im Intervall (18′) gelegen, also

$$f_p(\bar{\lambda}_n', \mu_p^{(q)}) = 0 ,$$

folglich

$$\omega_p(\bar{\lambda}_n') \geqq \mu_p^{(q)} .$$

Dies gilt für *alle* $\mu_p^{(q)}$, die der Ungleichung (17) genügen. Da die Menge $\mathfrak{M}_p$ überall dicht ist[13]), so folgt daraus für jedes positive $\delta$ die Richtigkeit der

[13]) $\mathfrak{M}_p$ ist überall dicht im Intervall $[m_p, M_p]$, also um so mehr im Intervall $[\omega', \omega'']$.

Ungleichung

$$\omega_p(\bar{\lambda}_n') > \omega' - \delta \tag{19''}$$

für hinreichend große $n$. Der Vergleich der Ungleichungen (19′) und (19″) ergibt

$$\lim_{n=\infty} \omega_p(\bar{\lambda}_n') = \omega',$$

womit gezeigt ist, daß die Funktion $\omega_p(\lambda)$ an der betrachteten Stelle $\lambda_0$ von links stetig ist, und in genau derselben Weise kann man zeigen, daß diese Funktion von rechts stetig ist. Wir schreiben in gewohnter Weise

$$\omega_p(\lambda_0 - 0) = \omega', \qquad \omega_p(\lambda_0 + 0) = \omega''.$$

Die letzte Behauptung unseres Satzes ist eine Konsequenz der oben dargelegten Tatsache, daß, falls $\omega_p(\lambda_0 - 0)$ und $\omega_p(\lambda_0 + 0)$ voneinander verschieden sind, für jede zwischen diesen beiden Grenzwerten liegende Stelle $\mu_p^{(q)}$ der Menge $\mathfrak{M}_p$ die Funktion $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ an der Stelle $\lambda = \lambda_0$ unstetig sein muß. In der Tat, da $\mathfrak{M}_p$ überall dicht im Intervall $[m_p, M_p]$ ist, so können wir bei vorgelegtem $\delta > 0$ *endlichviele Punkte* von $\mathfrak{M}_p$

$$\mu_p^{(1)}, \mu_p^{(2)}, \ldots, \mu_p^{(n)} \tag{20}$$

derart herausgreifen, daß in jedem Teilintervall von $[m_p, M_p]$ von der Länge $\delta$ mindestens eine dieser herausgegriffenen Stellen liegt. Ist daher $\lambda_0$ eine solche Unstetigkeitsstelle von $\omega_p(\lambda)$, wo der Sprung $|\omega_p(\lambda_0 - 0) - \omega_p(\lambda_0 + 0)|$ größer als $\delta$ ist, so liegt eine der obigen Größen (20) zwischen $\omega_p(\lambda_0 - 0)$ und $\omega_p(\lambda_0 + 0)$; folglich ist jede solche Stelle $\lambda_0$ gleichzeitig Sprungstelle einer der endlichvielen Funktionen (von $\lambda$)

$$f_p(\lambda, \mu_p^{(1)}),\ f_p(\lambda, \mu_p^{(2)}),\ \ldots,\ f_p(\lambda, \mu_p^{(n)}).$$

Da aber jede dieser Funktionen nur endlichviele Unstetigkeitsstellen hat, so ist die Anzahl der Stellen $\lambda_0$, an denen $\omega_p(\lambda)$ einen größeren Sprung als $\delta$ erleidet, ebenfalls endlich.

Damit sind alle unsere Behauptungen über das Verhalten der Funktionen $\omega_p(\lambda)$ bewiesen[14]).

## § 3.

### Beweis der in der Einleitung ausgesprochenen Sätze.

1. Um auf Grund der im vorangehenden Paragraphen gegebenen Konstruktion der Funktionen $\omega_p(\lambda)$ zu dem Beweise unserer in der Einleitung aufgestellten Sätze zu gelangen, beweisen wir die Richtigkeit der folgenden

[14]) Man erkennt auch unschwer, daß an einer Unstetigkeitsstelle $\lambda_0$ der Wert der Funktion $\omega_p(\lambda)$ gleich dem kleineren der Grenzwerte $\omega_p(\lambda_0 - 0)$ und $\omega_p(\lambda_0 + 0)$ ist.

Relation:

$$C_p(x) = \int_0^1 \omega_p(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots). \tag{21}$$

Man erkennt zunächst unmittelbar — auf Grund der am Schluß von § 1 gemachten Bemerkung — die Existenz des rechts stehenden Stieltjes-Riemannschen Integrals. Denn die Sprungstellen von $\omega_p(\lambda)$ liegen in den Mittelpunkten der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x)$; jede solche Sprungstelle kann daher in ein Intervall eingeschlossen werden, in dem die Variation von $\sigma(\lambda; x)$ gleich Null ist. Da ferner die Anzahl derjenigen Sprungstellen von $\omega_p(\lambda)$, wo der Sprung größer als eine vorgelegte positive Größe $\delta$ ist, endlich ist, so folgt, daß man diese Stellen in endlichviele Intervalle einschließen kann derart, daß die Summe der Zuwächse von $\sigma$ in diesen Intervallen gleich Null ist; — d. h. das am Ende von § 1 angegebene Kriterium ist sicherlich erfüllt.

Um (21) zu beweisen, ziehen wir die Darstellung (6) von $C_p(x)$ heran:

$$C_p(x) = \int_{m_p}^{M_p} \mu_p\, d\sigma^{(p)}(\mu_p; x), \tag{6}$$

wobei die rechte Seite der Grenzwert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_p^{(k-1)} [\sigma^{(p)}(\mu_p^{(k)}; x) - \sigma^{(p)}(\mu_p^{(k-1)}; x)]$$

ist, wenn die Anzahl der Teilungspunkte unbegrenzt derartig wächst, daß das Maximum von $\mu_p^{(k)} - \mu_p^{(k-1)}$ gegen Null konvergiert. Wir können annehmen, daß diese Teilungspunkte

$$\mu_p^{(0)} < \mu_p^{(1)} < \mu_p^{(2)} < \ldots < \mu_p^{(n)}$$

Punkte der in $m_p \leqq \mu_p \leqq M_p$ überall dichten Menge $\mathfrak{M}_p$ sind, und es sei $\varepsilon$ der größte Wert der Differenzen $\mu_p^{(k)} - \mu_p^{(k-1)}$. Wir erhalten für die obige endliche Summe — mit Rücksicht auf (14) — die Darstellung

$$S_\varepsilon = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \mu_p^{(k-1)} [f_p(\lambda, \mu_p^{(k)}) - f_p(\lambda, \mu_p^{(k-1)})]\, d\sigma(\lambda; x).$$

Die im Integranden stehende endliche Summe ist auf Grund der in 4. § 2 gegebenen Definition der Funktion $\omega_p(\lambda)$ leicht abzuschätzen. Denn es sind bei jedem $\lambda$ offenbar alle Differenzen

$$f_p(\lambda, \mu_p^{(k)}) - f_p(\lambda, \mu_p^{(k-1)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bis auf eine gleich Null; diese nicht verschwindende Differenz ist, falls $\omega_p(\lambda)$ von den Größen $\mu_p^{(0)}, \mu_p^{(1)}, \ldots, \mu_p^{(n)}$ verschieden ist, diejenige, für die $\mu_p^{(k-1)} < \omega_p(\lambda) < \mu_p^{(k)}$ ist; falls aber $\omega_p(\lambda) = \mu_p^{(k-1)}$ ist, so ist die fragliche Differenz entweder diejenige, für die $\mu_p^{(k-1)} = \omega_p(\lambda) < \mu_p^{(k)}$, oder diejenige,

für die $\mu_p^{(k-2)} < \omega_p(\lambda) = \mu_p^{(k-1)}$ ist, und der Wert des entsprechenden Gliedes in jener Summe ist gleich $\mu_p^{(k-1)}$ bzw. $\mu_p^{(k-2)}$, da die fragliche Differenz $= 1$ ist. Wir erhalten folglich bei jedem $\lambda$ für den Integranden die Abschätzung

$$\omega_p(\lambda) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \mu_p^{(k-1)} [f_p(\lambda; \mu_p^{(k)}) - f_p(\lambda; \mu_p^{(k-1)})] \leqq \omega_p(\lambda),$$

da das fragliche $\mu_p^{(k-1)}$ bzw. $\mu_p^{(k-2)}$ zwischen diesen Grenzen liegt. Da $\sigma(\lambda; x)$ nichtabnehmend und $\int_0^1 d\sigma(\lambda; x) = \mathsf{E}(x)$ ist, so folgt daraus unmittelbar

$$\int_0^1 \omega_p(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x) - \varepsilon \mathsf{E}(x) < S_\varepsilon \leqq \int_0^1 \omega_p(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x),$$

also (indem man zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergeht) unsere Behauptung (21).

2. Um die weiteren Entwicklungen in einfachster Form darstellen zu können, wollen wir an Stelle der bisher betrachteten Funktionen $\omega_p(\lambda)$ andere Funktionen $\tilde{\omega}_p(\lambda)$ einführen, die stetig sind und für die die Relationen (21) richtig bleiben. Dies geschieht ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Unstetigkeitsstellen der Funktionen $\omega_p(\lambda)$ in die Mittelpunkte der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x)$ fallen. Ist nämlich $\lambda_0$ irgendeine Stelle, an der $\omega_p(\lambda)$ einen Sprung erleidet, so wähle man $\varepsilon$ $(\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0) > 0)$ so klein, daß das Intervall $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$ ein echter Teil des entsprechenden Konstanzintervalls (dessen Mittelpunkt $\lambda_0$ ist) sei. In diesem Intervall ersetze man $\omega_p(\lambda)$ durch die lineare Funktion

$$\frac{\omega_p(\lambda_0+\varepsilon) - \omega_p(\lambda_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}\lambda - \frac{(\lambda_0-\varepsilon)\,\omega_p(\lambda_0+\varepsilon) - (\lambda_0+\varepsilon)\,\omega_p(\lambda_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$
$$(\lambda_0 - \varepsilon \leqq \lambda \leqq \lambda_0 + \varepsilon).$$

Führt man diese Konstruktion für alle Sprungstellen von $\omega_p(\lambda)$ aus, so gelangt man zu einer offenbar überall stetigen Funktion $\tilde{\omega}_p(\lambda)$, für die

$$\int_0^1 [\tilde{\omega}_p(\lambda) - \omega_p(\lambda)]\, d\sigma(\lambda; x) = 0$$

ist, da ja jedes solche Intervall, in dem $\tilde{\omega} - \omega$ nicht überall verschwindet, echter Teil eines Intervalls ist, in dem $\sigma(\lambda; x)$ konstant bleibt. Daraus folgt die Beziehung

$$C_p(x) = \int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x), \tag{22}$$

d. h. es gelten für alle $p$, $\alpha$, $\beta$ die Relationen

$$c_{p\alpha\beta} = \int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda).$$

3. Aus diesen Relationen erhält man unmittelbar die entsprechenden Darstellungen für die Formen

$$C_p C_\alpha(x) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} c_{p\alpha k} c_{q k \beta} x_\alpha x_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \Big( \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, d\sigma_{\alpha k}(\lambda) \int_0^1 \tilde{\omega}_q(\lambda)\, d\sigma_{k\beta}(\lambda) \Big) x_\alpha x_\beta .$$

Man hat zu diesem Ende nur zu beachten, daß aus den für die Matrizen $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)$ geltenden Relationen (13) — wie in 1. § 1 bemerkt — die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation (5′), d. h.

$$(5') \qquad \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma_{\alpha k}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\, d\sigma_{k\beta}(\lambda)$$

für jedes Paar von stetigen Funktionen $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ folgt. Setzt man darin $u(\lambda) = \tilde{\omega}_p(\lambda)$, $v(\lambda) = \tilde{\omega}_q(\lambda)$, so ergibt sich

$$(23) \qquad C_p C_q(x) = \int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, \tilde{\omega}_q(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x);$$

durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man die Darstellungen

$$(24) \qquad C_p C_q C_r(x) = \sum_{\alpha,\beta,k,l=1}^{\infty} c_{p\alpha k} c_{q k l} c_{r l \beta} x_\alpha x_\beta = \int_1^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, \tilde{\omega}_q(\lambda)\, \tilde{\omega}_r(\lambda)\, d\sigma(\lambda, x).$$

4. Auf Grund dieser Formeln können wir unseren Satz wie folgt beweisen: Wir ziehen unsere Bedingung III heran, die wir in der Form

$$\sum_{p=1}^{\infty} e_p c_{p\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

schreiben, wobei also $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ein Wertsystem von konvergenter Quadratsumme ist. Berücksichtigt man die Bedingung I des zu beweisenden Satzes ($c_{pqr} = c_{prq} = \ldots = c_{rqp}$), so erkennt man die Richtigkeit der Gleichungen

$$C_p(e) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} e_\alpha e_\beta = \sum_{\beta=1}^{\infty} \delta_{p\beta} e_\beta = e_p,$$

$$C_p C_q(e) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} c_{p\alpha k} c_{q k \beta} e_\alpha e_\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{pk} \delta_{qk} = \delta_{pq},$$

$$C_p C_q C_r(e) = \sum_{\alpha,\beta,k,l=1}^{\infty} c_{p\alpha k} c_{q k l} c_{r l \beta} e_\alpha e_\beta = \sum_{k,l=1}^{\infty} \delta_{pk} \delta_{rl} c_{qkl} = c_{pqr}.$$

(Die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der verschiedenen Summationen ist durch die Hilbertschen Faltungssätze gerechtfertigt.)

Mit Rücksicht auf diese Relationen erhalten wir aus den Darstellungen (23) und (24), wenn wir noch zur Abkürzung die Funktion

$$\tilde{\sigma}(\lambda) = \sigma(\lambda; e) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\, e_\alpha e_\beta$$

einführen, die Gleichungen

$$\int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\,\tilde{\omega}_q(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda) = \delta_{pq},$$

$$\int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\,\tilde{\omega}_q(\lambda)\,\tilde{\omega}_r(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda) = c_{pqr}; \tag{25}$$

dabei ist $\tilde{\sigma}(\lambda)$ eine im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierte nicht abnehmende Funktion. D. h. die stetigen Funktionen $\tilde{\omega}_p(\lambda)$ bilden im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ein in bezug auf die nicht abnehmende Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ orthogonales Funktionensystem, dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen $c_{pqr}$ besteht.

5. Wir haben noch zu zeigen, daß dieses Orthogonalsystem ein abgeschlossenes ist, d. h. daß für jede in $0 \leqq \lambda \leqq 1$ stetige Funktion $u(\lambda)$ die Relation[15])

$$\int_0^1 u^2(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_0^1 u(\lambda)\,\tilde{\omega}_k(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda)\Big)^2 \tag{26}$$

gilt. Zu diesem Ende betrachten wir die quadratische Form[16])

$$U(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}\,x_\alpha\,x_\beta = \int_0^1 u(\lambda)\,d\sigma(\lambda, x),$$

die wegen der Beschränktheit von $u(\lambda)$ ebenfalls beschränkt ist. Die Anwendung der Vollständigkeitsrelation (5′) liefert unmittelbar

$$U^2(x) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} u_{\alpha k}\,u_{k\beta}\,x_\alpha\,x_\beta = \int_0^1 u^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda; x),$$

$$UC_p(x) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} u_{\alpha k}\,c_{pk\beta}\,x_\alpha\,x_\beta = \int_0^1 u(\lambda)\,\omega_p(\lambda)\,d\sigma(\lambda; x),$$

so daß unsere Behauptung (26) mit der Relation

$$U^2(e) = \sum_{p=1}^{\infty}(UC_p(e))^2$$

äquivalent ist. Nun ist aber — mit Rücksicht auf I und III —

$$UC_p(e) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} u_{\alpha k}\,c_{pk\beta}\,e_\alpha\,e_\beta = \sum_{\alpha,k=1}^{\infty} \delta_{pk}\,u_{\alpha k}\,e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\infty} u_{\alpha p}\,e_\alpha,$$

und daher in der Tat

$$U^2(e) = \sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty} u_{\alpha p}\,e_\alpha\Big)^2 = \sum_{p=1}^{\infty}(UC_p(e))^2.$$

Damit ist unser Satz 1 in allen seinen Teilen bewiesen.

[15]) Bekanntlich ist diese Relation mit der Vollständigkeitsrelation (2′) äquivalent.

[16]) d. h. wir setzen $u_{\alpha\beta} = \int_0^1 u(\lambda)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)$.

6. Nach einer Bemerkung von Herrn Lebesgue[17]) kann man jedes Stieltjessche Integral auf mannigfache Weise auf gewöhnliche Integrale zurückführen. Im vorliegenden Falle, wo es sich um Integrale $\int_0^1 f(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda)$ mit stetigem $f(\lambda)$ und nicht abnehmendem $\tilde{\sigma}(\lambda)$ handelt, ist die folgende Zurückführung die bequemste. Man ordne jeder stetigen Funktion $f(\lambda)$ eine Funktion $F(s)$, die im Intervall

$$a = \tilde{\sigma}(0) \leqq s \leqq \tilde{\sigma}(1) = b \tag{27}$$

definiert ist, wie folgt zu: Ist $s_0$ ein solcher Wert, der an einer einzigen Stelle $\lambda_0$ von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ angenommen wird, so setze man

$$F(s_0) = f(\lambda_0);$$

nimmt $\tilde{\sigma}(\lambda)$ den Wert $s_1$ an mehreren Stellen an, also an jeder (inneren) Stelle eines Intervalls, so bezeichne man (um die Gedanken zu fixieren) mit $\lambda_1$ den Mittelpunkt dieses Intervalls und setze

$$F(s_1) = f(\lambda_1).$$

Ist endlich $s_2$ ein solcher Wert im obigen Intervall (27), den $\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht annimmt, so gibt es jedenfalls einen Wert $\lambda_2$ derart, daß

$$\tilde{\sigma}(\lambda_2 - o) \leqq s_2 \leqq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$$

ausfalle; in diesem Falle setze man $F(s_2) = f(\lambda_2)$.

Für die so definierte Funktion gilt offenbar

$$\int_a^b F(s)\,ds = \int_0^1 f(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda), \tag{28}$$

wobei das linksstehende Integral ein gewöhnliches Integral im Riemannschen Sinne ist, wie man sich durch den Vergleich der endlichen Summen, deren Grenzwert die beiden Integrale sind, leicht überzeugt. Die Unstetigkeitsstellen von $F(s)$ hängen nur von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ ab; ist ferner $\lambda_2$ eine Sprungstelle von $\tilde{\sigma}(\lambda)$, so ist das Intervall $\tilde{\sigma}(\lambda_2 - 0) \leqq s \leqq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$ ein Konstanzintervall aller dieser Funktionen $F(s)$. Man erkennt auch unmittelbar, daß diese Zuordnung der Funktionen $F(s)$ zu jeder stetigen Funktion $f(\lambda)$ (natürlich bei festem $\tilde{\sigma}(\lambda)$) distributiv ist und daß dem Produkte $f_1(\lambda) f_2(\lambda)$ zweier stetigen Funktionen das Produkt $F_1(s) F_2(s)$ der entsprechenden zugeordneten Funktionen zugeordnet ist.

Bezeichnen wir daher die zu den Funktionen $\tilde{\omega}_p(\lambda)$ vermöge der obigen Konstruktion zugeordneten Funktionen mit $\Omega_p(s)$, so gelten — mit Rück-

[17]) Vgl. Lebesgue a. a. O. [10]), S. 252—261.

sicht auf (25) — die Beziehungen

$$\int_a^b \Omega_p(s)\,\Omega_q(s)\,ds = \delta_{pq}, \qquad \int_a^b \Omega_p(s)\,\Omega_q(s)\,\Omega_r(s)\,ds = c_{pqr},$$

d. h. die beschränkten, im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktionen $\Omega_p(s)$ bilden ein im Intervall $a \leqq s \leqq b$ definiertes gewöhnliches orthogonales Funktionensystem, mit der kubischen Matrix $(c_{pqr})$ als Multiplikationstabelle.

Daß dieses Orthogonalsystem (in der Terminologie der Einleitung) in sich abgeschlossen ist, erkennt man unmittelbar, indem man in der Relation (26) an Stelle von $u(\lambda)$ die Funktionen $\tilde{\omega}_p(\lambda)\,\tilde{\omega}_q(\lambda)$ bzw. 1 einsetzt. Die resultierenden Gleichungen nehmen, wenn man statt den $\tilde{\omega}_p$ wiederum die $\Omega_p$ einführt, die folgende Form an:

$$\int_a^b (\Omega_p(s)\,\Omega_q(s))^2\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_a^b \Omega_p(s)\,\Omega_q(s)\,\Omega_k(s)\,ds\Big)^2$$

bzw.

$$\int_a^b 1 \cdot ds = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_a^b \Omega_p(s)\,ds\Big)^2,$$

deren Inhalt eben die fragliche Eigenschaft des Systems $\Omega_p(s)$ ist.

Damit ist die Existenz eines in sich abgeschlossenen, beschränkten Orthogonalsystems mit der Multiplikationstabelle $c_{pqr}$ bewiesen (Satz 2).

Man beachte noch, daß (falls die Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht überall stetig ist), jede unserer Orthogonalfunktionen $\Omega_p(s)$ in den endlichvielen oder abzählbarvielen Intervallen $\tilde{\sigma}(\lambda_2 - 0) \leqq s \leqq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$, wo $\lambda_2$ irgendeine Sprungstelle von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ bedeutet, konstant ist.

## § 4.

### Schlußbemerkungen. Isomorphe Orthogonalsysteme.

Der zuletzt bewiesene Satz gewährleistet die Existenz eines in sich abgeschlossenen Orthogonalsystems, das im allgemeinen nicht abgeschlossen zu sein braucht. Ja, man kann unschwer eine kubische Matrix $(c_{pqr})$ angeben, die den Bedingungen I, II, III genügt (für die also die Sätze 1 und 2 gelten), und von der man zeigen kann, daß ein zugehöriges abgeschlossenes Orthogonalsystem (in gewöhnlichem Sinne), dessen Multiplikationstabelle aus diesen Größen $c_{pqr}$ gebildet ist, nicht existiert. Will man daher bei allen solchen $c_{pqr}$ mit einem abgeschlossenen Funktionensystem operieren, so hat man die Orthogonalität entweder in der obigen Weise (also in bezug auf $\tilde{\sigma}(\lambda)$) zu fassen, oder aber — wenn man Stieltjessche Integrale vermeiden will — in einer anderen Weise, die ebenfalls in der Literatur bereits aufgetreten ist. Diese Modifikation des Orthogonalitätsbegriffes ist die folgende: Man greife aus dem Definitions-

bereich $\mathfrak{M}$ des beschränkten Funktionensystems $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \ldots$ eine endliche oder abzählbare Punktmenge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ heraus und ordne jeder dieser Stellen eine positive Größe $l_1$ bzw. $l_2, \ldots, l_n, \ldots$ hinzu, deren Summe konvergiert; an Stelle des Orthogonalitätsbegriffes treten die Relationen

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,ds + \sum_{n=1}^{\infty} l_n\,\varphi_p(a_n)\,\varphi_q(a_n) = \delta_{pq} \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

und es bietet keine Schwierigkeit, den Begriff der Abgeschlossenheit oder Vollständigkeit zu übertragen.

Auf Grund unseres Satzes 2 erkennt man unschwer, daß man, falls man diesen modifizierten Orthogonalitätsbegriff zugrunde legt, zu jedem den Bedingungen I, II, III genügenden Größensystem $c_{pqr}$ ein abgeschlossenes Funktionensystem konstruieren kann mit der kubischen Matrix $(c_{pqr})$ als Multiplikationstabelle. Man hat zu diesem Ende nur die erwähnte Tatsache zu beachten, daß jede der im Satze 2 auftretenden Funktionen $\Omega_p(s)$ in bestimmten endlichvielen oder abzählbarvielen Intervallen — deren Länge wir in irgendeiner Reihenfolge mit $l_1, l_2, l_3, \ldots$ bezeichnen — konstant bleibt. Ändert man — falls nötig — den Wert dieser Funktionen an den Anfangsstellen dieser Intervalle — wir bezeichnen diese Stellen mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — derart, daß $\Omega_p(a_n)$ gleich dem Wert von $\Omega_p(s)$ im angrenzenden Konstanzintervall sei, so erkennt man, daß die in dieser Weise modifizierten Funktionen in der Punktmenge, die aus dem ursprünglichen Definitionsintervall durch Fortlassung dieser Konstanzintervalle entsteht, die letztgenannten modifizierten Orthogonalitätseigenschaften erfüllen; und es ist auch leicht zu zeigen, daß die so erhaltenen Funktionen in dieser Punktmenge die modifizierte Vollständigkeitsrelation befriedigen.

2. Es liegt diesen Untersuchungen die Auffassung zugrunde, daß die Multiplikationstabelle die wesentlichen Eigenschaften des zugehörigen Orthogonalsystems enthält. Zwei Orthogonalsysteme, deren Multiplikationstabellen übereinstimmen, sollen daher in ihren wesentlichen Eigenschaften übereinstimmen. Wir nennen solche Orthogonalsysteme *isomorph*; die Bedingungen der *Isomorphie* zweier Orthogonalsysteme, $\Omega'_p(s')$ bzw. $\Omega''_p(s'')$, deren Definitionsbereich $\mathfrak{M}'$ bzw. $\mathfrak{M}''$ ist, lauten daher wie folgt:

$$\int_{\mathfrak{M}'} \Omega'_p(s')\,\Omega'_q(s')\,\Omega'_r(s')\,ds' = \int_{\mathfrak{M}''} \Omega''_p(s'')\,\Omega''_q(s'')\,\Omega''_r(s'')\,ds''$$

$$(p, q, r = 1, 2, 3, \ldots)$$

und analog in den anderen Fällen.

Ein Licht auf den Zusammenhang zwischen isomorphen Orthogonalsystemen wirft der folgende Satz:

Die beiden abgeschlossenen und beschränkten Orthogonalsysteme: das in der Punktmenge $\mathfrak{M}'$ definierte System $\Omega_p'(s')$ und das in $\mathfrak{M}''$ definierte System $\Omega_p''(s'')$ seien isomorph. Es müssen in diesem Falle $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ dasselbe Maß besitzen und diese beiden Orthogonalsysteme erzeugen eine Zuordnung, die jeder meßbaren Teilmenge $\mathfrak{m}'$ von $\mathfrak{M}'$ eine maßgleiche Teilmenge $\mathfrak{m}''$ von $\mathfrak{M}''$ zuordnet derart, daß elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{m}_1'$ und $\mathfrak{m}_2'$ von $\mathfrak{M}'$ solche Teilmengen $\mathfrak{m}_1''$ und $\mathfrak{m}_2''$ von $\mathfrak{M}''$ zugeordnet sind, deren gemeinsamer Teil eine Nullmenge ist, und die der Vereinigungsmenge $\mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2'$ zugeordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}''$ bis auf eine Nullmenge mit $\mathfrak{m}_1'' + \mathfrak{m}_2''$ übereinstimmt; diese Zuordnung ist so beschaffen, daß, wie auch das Polynom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von beliebig vielen Veränderlichen, und die Größen $a$, $b$ gewählt sind, derjenigen Teilmenge $\mathfrak{m}'$ von $\mathfrak{M}'$, in der

$$a \leqq f(\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_n') \leqq b$$

ist, diejenige (ihr maßgleiche) Teilmenge $\mathfrak{m}''$ von $\mathfrak{M}''$ zugeordnet ist, in der

$$a \leqq f(\Omega_1'', \Omega_2'', \ldots, \Omega_n'') \leqq b$$

ist. Die Umkehrung dieses Satzes ist trivial.

Den Beweis dieses Satzes und anderer Sätze dieser Art gedenke ich an einer anderen Stelle darzulegen.

(Eingegangen am 27. November 1929.)

Berichtigung zu der Arbeit „Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage“ von Helmut Hasse.

Wie mir von befreundeter Seite mitgeteilt wird, ist auf S. 569, Z. 9 ein grober Druckfehler stehen geblieben:

Statt „Unternehmergruppenreihen“ lies „Untergruppenreihen“.

---

Preisaufgabe der Königsberger Gelehrten Gesellschaft.

„Im Anschluß an ein von H. Poincaré im Jahre 1907 gestelltes Problem haben sich in den letzten Jahren mehrere Forscher mit der topologischen Natur derjenigen Abbildungen beschäftigt, welche durch $n$ analytische Funktionen von $n$ komplexen Veränderlichen vermittelt werden. Zu dieser Frage sollen neue Beiträge geliefert werden, bei denen die Wechselbeziehung von funktionentheoretischen und geometrischen, insbesondere topologischen Methoden in Erscheinung tritt.“

Die Arbeiten sind bis zum 15. Oktober 1931 mit Motto versehen einzureichen. In einem mit gleichem Motto versehenen, verschlossenen Briefumschlage ist der Name des Verfassers beizufügen. Die Verleihung des Preises in Höhe von 1000 RM. erfolgt im Januar 1932 am Gründungstage unserer Gesellschaft.

Mit der Zuerteilung des Preises erwirbt sich die Königsberger Gelehrte Gesellschaft das Recht, die preisgekrönte Arbeit drucken zu lassen.

## Der erste Mathematiker-Kongreß
### der Union der Sozialistischen Räte-Republiken.

Die Mathematiker-Vereinigung der UdSRR veranstaltet den ersten Mathematiker-Kongreß der Sowjet-Union in Charkiw (Kharkow) vom 24. bis 29. Juni 1930.

All die Angehörigen der Sowjet-Union, die mathematische Wissenschaften treiben, haben das Recht am Kongreß teilzunehmen. Für die Mathematiker-Vereinigung der UdSRR wäre auch die Teilnahme ausländischer Mathematiker sehr wünschenswert.

Der Kongreß wird aus allgemeinen Versammlungen und Sektionssitzungen folgender sechs Sektionen bestehen:

1. Algebra und Zahlentheorie,
2. Funktionentheorie,
3. Differential- und Funktionalgleichungen,
4. Geometrie,
5. Mechanik und mathematische Physik,
6. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik.

Die Personen, die am Kongreß teilnehmen wollen, werden gebeten, wegen aller Auskünfte an das Organisationskomitee des Kongresses sich zu wenden (Charkiw, Hauptpostamt, Kasten Nr. 333).

Das Büro des Organisationskomitees:

Vorsitzender S. Bernstein,
Vertreter des Vorsitzenden D. Sinzow,
Generalsekretär M. Martschewski,
Sekretär für den Verkehr mit ausländischen Gelehrten W. Gontscharow.